

# MINI-PROJET

Estimateurs d'erreur a posteriori pour les équations aux dérivées partielles  
elliptiques

par

R. E. Bank et A. Weiser

Raphaël BULLE

dirigé par F.CHOULY et A.LOZINSKI

17 avril 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et notations.</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Premières définitions . . . . .	3
1.3	Problème de Neumann . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Approximations éléments finis</b>	<b>13</b>
2.1	Maillage . . . . .	13
2.2	Espaces d'approximation, espaces brisés et interpolation . . .	18
2.3	Problèmes discrets et erreurs d'approximation . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Résultats préliminaires</b>	<b>33</b>
3.1	Inégalités classiques . . . . .	33
3.2	Résultats sur les erreurs d'approximation . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Estimateurs d'erreur</b>	<b>53</b>
4.1	Second estimateur . . . . .	53
4.2	Troisième estimateur . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>64</b>
5.1	Cadre et problème considéré . . . . .	64
5.2	Cas d'une gaussienne sur $]0, 1[^2$ . . . . .	66
5.2.1	Maillage uniforme cartésien . . . . .	66
5.2.2	Maillage quelconque . . . . .	67
5.2.3	Quelques figures pour le maillage uniforme cartésien . .	68
<b>A</b>	<b>Algorithmes</b>	<b>74</b>
<b>B</b>	<b>Quelques précisions sur les algorithmes</b>	<b>77</b>

# Chapitre 1

## Introduction et notations.

### 1.1 Motivation

L'objectif d'un estimateur d'erreur est de borner, dans une certaine norme, la différence entre la «véritable» solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) et son approximation éléments finis. On différencie alors estimateur d'erreur *a priori* et *a posteriori* par le fait que le second ne comporte que des termes *connus*, c'est à dire des données du problème et la solution approchée. Le premier peut quant à lui, faire intervenir la véritable solution de l'EDP, qui est *en général inconnue*.

Les estimateurs d'erreur *a priori* sont principalement utilisés à des fins théoriques pour par exemple, montrer que l'erreur tend bien vers zéro en même temps que le pas du maillage. Les estimateurs d'erreur *a posteriori* ont eux, des applications plus concrètes et permettent notamment d'adapter le maillage en fonction des zones où l'erreur est la plus grande et ce, sans avoir à connaître la véritable solution du problème.

L'article [4] présente trois estimateurs d'erreur *a posteriori* pour les solutions approchées par éléments finis d'EDP elliptiques. Ces trois estimateurs seront calculés à partir de problèmes de Neumann locaux, définis sur chaque élément du maillage.

Nous n'étudierons ici que les deuxième et troisième estimateurs de l'article original. Nous nous placerons également dans un cadre plus restrictif en considérant notre EDP sur un domaine polygonal, en prenant des données de carré intégrable et en utilisant les éléments finis de Lagrange pour discrétiser notre problème.

## 1.2 Premières définitions

Considérons  $\Omega$  un domaine (c'est à dire une partie ouverte et connexe) non vide et borné du plan  $\mathbb{R}^2$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est supposée polygonale.

### Définitions classiques

Voici tout d'abord quelques définitions classiques.

Pour une fonction :

$$\begin{aligned} v : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto v(x), \end{aligned}$$

possédant la régularité suffisante, on définit le gradient de  $v$  noté  $\nabla v$  comme étant le vecteur colonne des dérivées partielles de  $v$ . Plus précisément :

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Nous noterons  $n$  le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  défini comme la normale unitaire sortante de  $\partial\Omega$  et pour une fonction  $v$  définie sur  $\Omega$ ,  $\frac{\partial v}{\partial n}$  désignera la dérivée normale de  $v$  définie comme étant le produit scalaire du gradient de  $v$  avec la normale :

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n.$$

L'espace vectoriel des fonctions définies presque partout sur  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  et de carré intégrable sera noté  $L^2(\omega)$ . Plus précisément :

$$L^2(\omega) = \left\{ \psi : \omega \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{\omega} |\psi|^2 d\lambda < +\infty \right\},$$

où  $\lambda$  représente, en fonction de  $\omega$  soit la mesure de Lebesgue surfacique (notée  $\mu$ ) soit la mesure de Lebesgue linéique (notée  $s$ ).

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $L^2(\omega)$ . L'espace  $L^2(\omega)$  est muni du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{\omega} = \int_{\omega} uv d\mu, \text{ lorsque la mesure est surfacique,}$$

et,

$$\langle u, v \rangle_{\omega} = \int_{\omega} uv ds, \text{ lorsque la mesure est linéique.}$$

La norme associée au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  est donnée par :

$$\|u\|_{\omega} = \int_{\omega} u^2 d\mu,$$

et celle associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par :

$$|u|_{\omega} = \int_{\omega} u^2 ds.$$

**Proposition 1.** *L'espace  $L^2(\omega)$  muni du produit scalaire défini ci-dessus est un espace de Hilbert.*

*Remarque :*

- Dorénavant nous ne ferons plus apparaître les termes  $d\mu$  et  $ds$  dans les intégrales, ceux-ci faisant toujours référence aux mêmes mesures en fonction des ensembles  $\omega$  considérés.
- Dans la suite,  $\omega$  sera typiquement soit un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$  (on associera alors à  $L^2(\omega)$  le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\omega$ ) soit un chemin simple et  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux (on associera alors à  $L^2(\omega)$  le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ ).
- Dans le cas particulier où  $\omega = \Omega$  nous noterons le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  simplement  $(\cdot, \cdot)$ . De même, la norme  $\|\cdot\|_\Omega$  sera notée  $\|\cdot\|$ .
- Dans le cas où  $\omega = \partial\Omega$ , le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$  sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De même, la norme  $|\cdot|_{\partial\Omega}$  sera notée  $|\cdot|$ .

Définissons pour finir la divergence d'une fonction vectorielle : pour une fonction  $\psi$  telle que :

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \psi_1(x_1) \\ \psi_2(x_2) \end{pmatrix}$$

on appelle divergence de  $\psi$ , notée  $\text{div}(\psi)$  la fonction définie par :

$$\text{div}(\psi) = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}.$$

### 1.3 Problème de Neumann

Nous nous intéressons au problème de Neumann suivant :

**Problème 1.** *Trouver une fonction  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

$$(1.1) \quad \begin{cases} L(u) = -\text{div}(a\nabla u) + bu = f & \text{sur } \Omega, \\ a \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où :

- les fonctions  $f$  et  $g$  sont les données du problème telles que :

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad g \in L^2(\partial\Omega),$$

- la fonction  $a : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overline{\Omega}$  et  $b : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $\overline{\Omega}$ . Nous supposons également qu'il existe des constantes  $\underline{a}$  et  $\overline{a}$  telles que pour tout  $x$  dans  $\Omega$  :

$$(1.2) \quad 0 < \underline{a} \leq a(x) \leq \overline{a},$$

et la fonction  $b$  est soit constante égale à zéro, soit bornée par deux constantes  $\underline{b}$  et  $\overline{b}$ , autrement dit pour tout  $x$  dans  $\Omega$  :

$$(1.3) \quad 0 < \underline{b} \leq b(x) \leq \overline{b}.$$

*Remarque :*

- L'article [4] note le Problème 1 de manière légèrement différente en utilisant la notation  $\nabla \cdot (a\nabla u)$  pour  $\operatorname{div}(a\nabla v)$ . En effet, si  $u$  est une fonction de la variable  $x = (x_1, x_2)$  vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , le terme  $\nabla \cdot (a\nabla u)$  est à comprendre comme ceci :

$$\nabla \cdot (a\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( a \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = \operatorname{div}(a\nabla u).$$

- Dans l'article original, la régularité des fonctions  $f$  et  $g$  n'est pas spécifiée. Les supposer dans  $L^2$  n'engendrera aucune restriction dans les résultats qui suivent et permettra même dans certains cas d'éviter d'avoir à faire des hypothèses sur la régularité de la solution du Problème 1.

### Formulation faible

Voici encore des définitions classiques concernant les espaces fonctionnels que nous serons amenés à côtoyer.

Pour  $k$  un entier strictement positif et  $\omega \subset \Omega$ , notons  $H^k(\omega)$  l'espace de Sobolev défini par :

$$H^k(\omega) = \{v \in L^2(\omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha v \in L^2(\omega)\},$$

où  $\partial^\alpha v$  est la  $\alpha^{\text{ième}}$  dérivée partielle de  $v$  au sens des distributions.

**Proposition 2.** *L'espace de Sobolev  $H^k(\omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini, pour  $u$  et  $v$  dans  $H^k(\omega)$  par :*

$$(u, v)_{k,\omega} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leq k}} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_\omega,$$

de norme associée :

$$\|u\|_{k,\omega} = \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_\omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Démonstration.* Voir [5], chapitres VIII.2 et IX.1 pour la preuve. □

*Remarque :*

- On notera également pour  $u$  appartenant à  $H^k(\omega)$  :

$$|u|_{k,\omega} = \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=k}} \|\partial^\alpha u\|_\omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

la semi-norme faisant intervenir les dérivées partielles de  $u$  de plus haut degré.

- Dans le cas où  $k = 1$  et où  $\omega = \Omega$  nous noterons  $H$  l'espace  $H^1(\Omega)$ ,  $(\cdot, \cdot)_1$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|_1$  la norme associée.

**Définition-Proposition 1.** *Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . En reprenant les notations du Problème 1, définissons :*

$$\begin{aligned} H^1(\omega) \times H^1(\omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v)_\omega = \int_\omega (a \nabla u \nabla v + b u v). \end{aligned}$$

*Ainsi définie,  $a(\cdot, \cdot)_\omega$  est une forme bilinéaire, continue et  $H^1(\omega)$ -elliptique si  $b$  vérifie (1.3) sur  $\omega$ . Cette forme bilinéaire est appelée produit scalaire de*

*l'énergie. Pour  $u$  une fonction de  $H^1(\omega)$ , la norme associée à  $a(\cdot, \cdot)_\omega$ , appelée norme de l'énergie est définie par :*

$$\|u\|_\omega = \sqrt{a(u, u)_\omega}.$$

*Démonstration.* Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ .

- Le fait que  $a(\cdot, \cdot)_\omega$  est bilinéaire se montre facilement.
- Montrons la continuité de  $a(\cdot, \cdot)_\omega$ . Supposons tout d'abord que la fonction  $b$  vérifie (1.3). Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $H^1(\omega)$  alors par définition des fonctions  $a$  et  $b$  dans le Problème 1 et par Cauchy-Schwarz appliqué au produit scalaire de  $H^1(\omega)$  :

$$\begin{aligned} a(u, v)_\omega &= \int_\omega (a \nabla u \nabla v + buv) \\ &\leq \max(\bar{a}, \bar{b}) (u, v)_{1, \omega} \\ &\leq \max(\bar{a}, \bar{b}) \|u\|_{1, \omega} \|v\|_{1, \omega}. \end{aligned}$$

D'où la continuité.

- Montrons que  $a(\cdot, \cdot)_\omega$  est  $H^1(\omega)$ -elliptique. Supposons que  $b$  vérifie (1.3) sur  $\omega$ . Soit  $u$  fonction de  $H^1(\omega)$  alors par définition des fonctions  $a$  et  $b$  :

$$\begin{aligned} \|u\|_\omega^2 &= \int_\omega a |\nabla u|^2 + b |u|^2 \\ &\geq \min(\underline{a}, \underline{b}) \left( \int_\omega |\nabla u|^2 + \int_\omega |u|^2 \right) \\ &\geq \min(\underline{a}, \underline{b}) \|u\|_{1, \omega}^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

*Remarque :* Lorsque  $\omega = \Omega$  on notera simplement  $a(\cdot, \cdot)$  au lieu de  $a(\cdot, \cdot)_\Omega$ . De même pour la norme de l'énergie qui sera notée  $\|\cdot\|$ .

**Proposition 3.** *Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Si la fonction  $b$  vérifie (1.3) sur  $\omega$ , les normes  $|||\cdot|||_\omega$  et  $||\cdot||_{1,\omega}$  sont équivalentes sur l'espace  $H^1(\omega)$ , plus précisément pour toute fonction  $v$  de  $H^1(\omega)$  on a :*

$$(1.4) \quad \sqrt{\min(\underline{a}, \underline{b})} ||v||_{1,\omega} \leq |||v|||_\omega \leq \sqrt{\max(\bar{a}, \bar{b})} ||v||_{1,\omega}.$$

*Sans avoir besoin d'écarter le cas où  $b$  est identiquement nulle, on a pour toute fonction  $v$  de  $H^1(\omega)$ , l'inégalité :*

$$(1.5) \quad |||v|||_\omega \geq \sqrt{\underline{a}} |\nabla v|_\omega$$

*Démonstration.*

- L'équivalence des normes (1.4) se prouve de manière analogue à la continuité et la  $H^1(\omega)$ -ellipticité de  $a(\cdot, \cdot)_\omega$ .
- Pour l'inégalité (1.5), soit  $v$  une fonction de  $H^1(\omega)$  alors :

$$\begin{aligned} |||v|||_\omega^2 &= \int_\omega a |\nabla v|^2 + b |v|^2 \\ &\geq \underline{a} \left( \int_\omega |\nabla v|^2 \right) \\ &\geq \underline{a} |\nabla v|_\omega^2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4** (Formule de Green, [7]). *Soit  $\omega$  un ouvert non vide borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et de normale unitaire sortante :*

$$n_\omega = \begin{pmatrix} n_{\omega,1} \\ n_{\omega,2} \end{pmatrix}.$$

*Alors si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\omega)$ , on a pour  $i \in \{1, 2\}$  :*

$$\int_\omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_\omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\omega} uv n_{\omega,i}.$$

*Démonstration.* Voir [7] Chapitre 1.4. □

**Proposition 5.** *Soit  $\omega$  un ouvert non vide borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière de classe  $C^1$  par morceaux et de normale unitaire sortante :*

$$n_\omega = \begin{pmatrix} n_{\omega,1} \\ n_{\omega,2} \end{pmatrix}.$$

Alors si  $u$  appartient à  $H^2(\omega)$  et  $v$  appartient à  $H^1(\omega)$ , on a :

$$a(u, v)_\omega = \int_\omega -\operatorname{div}(a\nabla u)v + buv + \int_{\partial\omega} a \frac{\partial u}{\partial n_\omega} v.$$

*Démonstration.* Soit  $u$  fonction de  $H^2(\omega)$  et  $v$  fonction de  $H^1(\omega)$ . Alors :

$$\begin{aligned} a(u, v)_\omega &= \int_\omega a\nabla u \cdot \nabla v + buv \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \int_\omega a \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \int_\omega buv. \end{aligned}$$

Or, comme on a supposé  $u \in H^2(\omega)$  on peut appliquer la Proposition 4 aux fonctions  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  et  $v$  appartenant à  $H^1(\omega)$ . Ainsi pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$\int_\omega a \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\omega -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v + \int_{\partial\omega} a \frac{\partial u}{\partial x_i} n_{\omega,i} v.$$

Puis en sommant sur  $i$  :

$$\int_\omega a\nabla u \cdot \nabla v = \int_\omega -\operatorname{div}(a\nabla u)v + \int_{\partial\omega} a \frac{\partial u}{\partial n_\omega} v.$$

Ainsi :

$$a(u, v)_\omega = \int_\omega -\operatorname{div}(a\nabla u)v + buv + \int_{\partial\omega} a \frac{\partial u}{\partial n_\omega} v.$$

□

Donnons maintenant une formulation faible du Problème 1.

**Problème 2** (Formulation faible). *En utilisant les notations données précédemment, trouver une fonction  $u$  dans  $H$  telle que :*

$$(1.6) \quad a(u, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle \text{ pour tout } v \in H.$$

**Théorème 1** (Lax-Milgram, [5]). *Soit  $E$  un espace de Hilbert et  $s(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue et  $E$ -elliptique définie sur  $E$ . Alors pour toute forme linéaire continue  $\psi$  sur  $E$ , il existe un unique élément  $u$  de  $E$  tel que pour tout  $v$  dans  $H$  :*

$$s(u, v) = \psi(v).$$

*Démonstration.* Voir [5] Chapitre V.3.

□

**Proposition 6.**

1. *Si la fonction  $b$  vérifie (1.3) alors le Problème 2 est bien posé (i.e. admet une unique solution  $u$  appartenant à  $H$ ).*
2. *Si  $b$  est identiquement nulle et que les fonctions  $f$  et  $g$  sont compatibles, c'est à dire :*

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g = 0,$$

*alors le Problème 2 admet une solution dans  $H$  unique à l'addition d'une constante près. En particulier, on a unicité de la solution  $u$  dans  $H$  telle que :*

$$\int_{\Omega} u = 0.$$

*Démonstration.*

1. Supposons que  $b$  vérifie (1.3). D'après la Définition-Proposition 1, la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et  $H$ -elliptique. Par ailleurs, il est facile de vérifier, en appliquant le Théorème de trace (voir [2] Chapitre 4.3.3) que l'application définie sur  $H$  par :

$$v \longmapsto \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v,$$

est une forme linéaire continue. Ainsi, nous pouvons appliquer le Théorème 1 qui nous donne l'existence et l'unicité de la solution au Problème 2.

2. La démonstration de ce point est similaire à ce que l'on peut trouver dans [2] au Chapitre 5.2.2.

□

# Chapitre 2

## Approximations éléments finis

Dans ce chapitre nous présenterons l'ensemble des outils utiles à la discrétisation du Problème 2 notamment le maillage et les espaces éléments finis puis nous établirons différents problèmes discrets nous permettant d'approcher la solution du Problème 2.

### 2.1 Maillage

Nous appellerons *triangle* un ensemble fermé, borné et non vide du plan  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière est l'union de trois segments. Une *famille de maillages triangulaires* ou *famille de triangulations* sera définie comme une famille indexée par le réel strictement positif  $h$  et notée  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  dont chaque élément  $\mathcal{T}_h$  pour un  $h$  donné est une collection de triangles formant une partition de l'ensemble  $\bar{\Omega}$  (voir Figure 2.1). Autrement dit pour  $T_1, T_2$  deux triangles distincts de  $\mathcal{T}_h$  :

- soit  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ ,
- soit  $T_1 \cap T_2 = \chi$  où  $\chi$  est un sommet commun,
- soit  $T_1 \cap T_2 = E$  où  $E$  est une arête commune,
- $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\Omega}$ .

Pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , nous noterons  $h_T$  son diamètre (i.e. la longueur de sa plus grande arête), l'indice  $h$  appelé *pas* du maillage  $\mathcal{T}_h$  sera défini par :

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

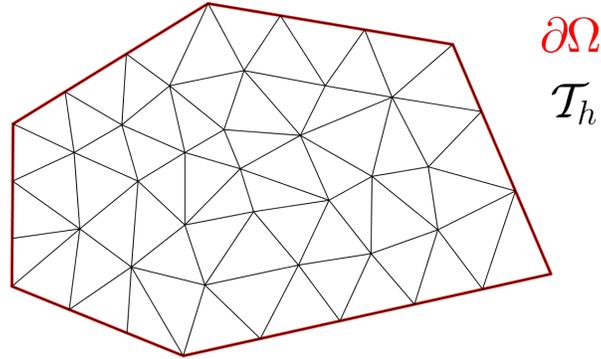


FIGURE 2.1 – Exemple de domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  polygonale et muni d'un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_h$ .

Ainsi le pas  $h$  va représenter la finesse du maillage. Plus  $h$  sera petit plus le maillage  $\mathcal{T}_h$  sera fin.

De plus, nous noterons  $\mathcal{E}_h$  la collection des courbes correspondant aux arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$ . L'ensemble  $\mathcal{E}_h$  est partitionné ainsi :

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^B \sqcup \mathcal{E}_h^I,$$

où  $\mathcal{E}_h^B$  désigne l'ensemble des arêtes appartenant à  $\partial\Omega$  et  $\mathcal{E}_h^I$  l'ensemble des arêtes intérieures.

Pour une arête  $E$  de  $\mathcal{E}_h$  nous noterons  $h_E$  sa longueur.

Pour chaque triangle  $T$  du maillage nous noterons de plus,  $\mathcal{E}^T$  l'ensemble de ses trois arêtes et  $\mathcal{N}^T$  l'ensemble des triangles fermés voisins de  $T$ , défini par :

$$\mathcal{N}^T = \{T' \in \mathcal{T}_h, T' \cap T \neq \emptyset\}.$$

Voyons maintenant deux définitions concernant la régularité du maillage  $\mathcal{T}_h$ .

**Définition 1** (Shape regularity). *Soit  $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}_h$  une famille de maillages triangulaires sur  $\Omega$ . Nous dirons que la famille  $\mathcal{F}$  est shape regular s'il existe  $\delta_0$  une constante réelle strictement positive telle que pour chaque triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\mathcal{F}$  : le rayon du cercle inscrit de chaque triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , noté  $\rho_T$ , est au moins de longueur  $\delta_0 h_T$  (voir Figure 2.2), autrement dit :*

$$\rho_T \geq \delta_0 h_T.$$

Nous dirons alors par abus de langage que les triangulations  $\mathcal{T}_h$  ainsi que les triangles de ces triangulations sont également shape regular, ce que nous noterons (SR).

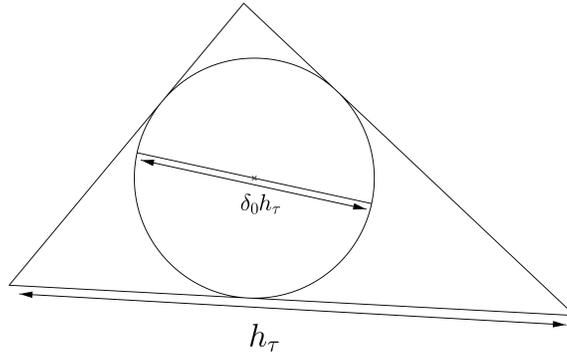


FIGURE 2.2 – La constante  $\delta_0$  mesure la régularité des triangles.

Nous supposons maintenant que tous les maillages considérés appartiennent à une famille  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  qui vérifie (SR). Cette régularité a plusieurs conséquences sur un maillage  $\mathcal{T}_h$ . Tout d'abord, tous les angles des triangles du maillage doivent être de mesures plus grandes qu'une certaine valeur dépendant de  $\delta_0$ . Ensuite, la shape regularity implique la quasi-uniformité locale de la famille  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  au sens suivant :

**Définition 2** (Quasi-uniformité locale). Une famille de maillages triangulaires  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  est dite localement quasi-uniforme (noté  $(QUL)$ ) si il existe une constante positive  $\delta_1$  dépendant de  $\delta_0$  telle que pour toute triangulation  $\mathcal{T}_h$  de cette famille, on ait : pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , tout triangle  $T'$  de  $\mathcal{N}^T$  et toute arête  $E'$  de  $\mathcal{E}^{T'}$  :

$$(2.1) \quad \delta_1^{-1}h_T \leq h_{E'} \leq \delta_1 h_T.$$

Par abus de langage nous dirons alors que les maillages de  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  sont localement quasi-uniformes.

Esquissons une preuve du fait que  $(SR)$  implique  $(QUL)$  en montrant la contraposée. Le fait d'avoir un maillage  $\mathcal{T}_h$  ne vérifiant pas  $(QUL)$  permet, si l'on choisit un triangle  $T$  quelconque de  $\mathcal{T}_h$ , de trouver un de ses voisins  $T'$  possédant une arête  $E'$  de taille bien inférieure au diamètre de  $T$ . Or en faisant cela, on obtient un triangle  $T'$  qui lui ne vérifie pas  $(SR)$  (voir Figure 2.3).

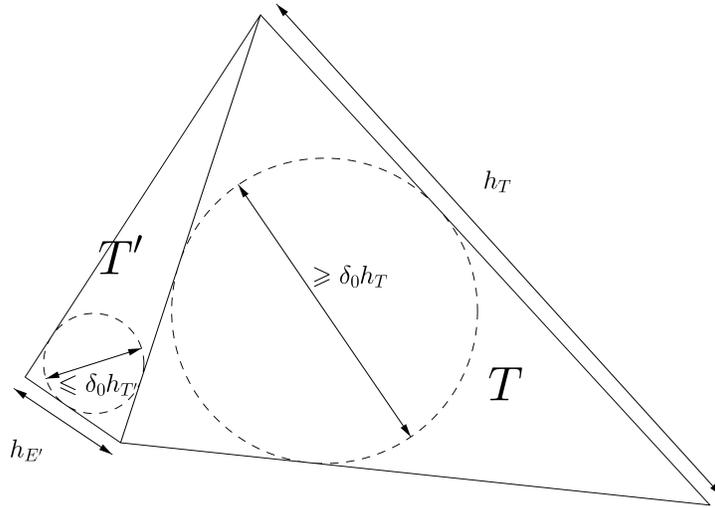


FIGURE 2.3 – En supposant non  $(QUL)$  on permet l'existence du triangle  $T'$  ne vérifiant pas  $(SR)$  .

*Remarque :* La régularité  $(QUL)$  du maillage implique notamment que chaque triangle ne peut posséder un trop grand nombre de voisins.

Dorénavant nous considérerons sur  $\Omega$  exclusivement des maillages  $\mathcal{T}_h$  vérifiant  $(SR)$  et  $(QUL)$ .

### Normale, saut et moyenne

Pour chaque arête  $E$  de  $\mathcal{E}_h$ , si  $E$  est sur le bord, donc dans  $\mathcal{E}_h^B$  on définit la normale (unitaire) à  $E$  notée  $n_E = n$  comme étant la normale extérieure à  $\Omega$ . Sinon, si  $E$  est une arête intérieure de  $\mathcal{E}_h^I$  on choisit alors la normale à  $E$  de manière arbitraire. Pour une arête intérieure  $E$ , partagée par deux triangles  $T_{\text{in}}$  et  $T_{\text{out}}$ , on appellera  $T_{\text{in}}$  le triangle tel que la normale à  $E$  soit également la normale sortante à  $T_{\text{in}}$  (voir Figure 2.4).

Ainsi, les notations  $T_{\text{in}}$  et  $T_{\text{out}}$  dépendent bien entendu de l'arête considérée.

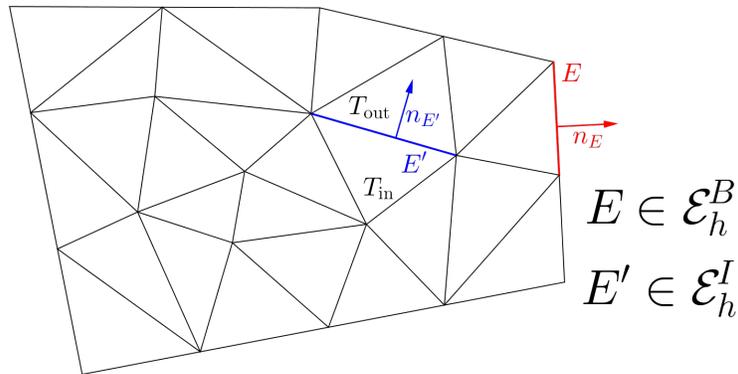


FIGURE 2.4 – Définitions des normales.

Soient  $T_{\text{in}}$  et  $T_{\text{out}}$  deux triangles de  $\mathcal{T}_h$  partageant l'arête  $E \in \mathcal{E}_h^I$  et  $v$  une fonction continue par morceaux sur chacun des triangles. On définit le *saut* de  $v$  en  $x \in E$  par :

$$\llbracket v \rrbracket (x) = v|_{T_{\text{out}}}(x) - v|_{T_{\text{in}}}(x).$$

*Remarque* : Le saut de la dérivée normale  $\left[ \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \right]$  ne dépend pas du sens de la normale  $n$ .

De même, on définit la *moyenne* de  $v$  en  $x \in E$  par :

$$\{v\}(x) = \frac{1}{2} (v|_{T_{\text{out}}}(x) + v|_{T_{\text{in}}}(x)).$$

## 2.2 Espaces d'approximation, espaces brisés et interpolation

### Espaces d'approximation

Nous utiliserons les éléments finis de Lagrange pour discrétiser notre problème. Commençons par quelques résultats préliminaires avant de définir les éléments finis de Lagrange.

**Proposition 7** ([6], Chap. 1.3.2). *Considérons le triangle de référence  $\tilde{T}$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , de sommets  $\{(0, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ . Soit maintenant  $T$  un triangle quelconque du maillage  $\mathcal{T}_h$ . Alors il existe une bijection affine  $\mathcal{S}_T$  envoyant le triangle  $\tilde{T}$  sur  $T$  :*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T : \tilde{T} &\longrightarrow T \\ \tilde{x} &\longmapsto x = J_T \tilde{x} + b_T, \end{aligned}$$

avec  $J_T$  une matrice réelle  $2 \times 2$  inversible qui est également la matrice Jacobienne de  $\mathcal{S}_T$  et  $b_T$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

*Remarque :*

1. On montre facilement que l'application réciproque  $\mathcal{S}_T^{-1}$  admet l'expression suivante :

$$\mathcal{S}_T^{-1}(x) = J_T^{-1}\tilde{x} - J_T^{-1}b_T.$$

2. Si on note  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$  et  $x = \mathcal{S}_T(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , on a :

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_2} \end{pmatrix}.$$

3. De la même manière on aura :

$$J_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

**Lemme 1** ([6], Chap. 1.5.1). *Avec les notations de la Proposition 7 et en notant  $\rho_K$  le rayon du cercle inscrit à un triangle  $K$ , on a :*

1.  $|||J_T|||_2 \leq \frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}},$
2.  $|||J_T^{-1}|||_2 \leq \frac{h_{\tilde{T}}}{\rho_T} \leq \frac{1}{\delta_0 h_T},$

où  $|||\cdot|||_2$  représente la norme matricielle subordonnée à la norme Euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ , notée  $\|\cdot\|_2$ .

*Démonstration.*

1. Par définition de la norme subordonnée  $|||\cdot|||_2$  on a :

$$|||J_T|||_2 = \sup_{\tilde{x} \neq 0} \frac{\|J_T \tilde{x}\|_2}{\|\tilde{x}\|_2} = \frac{1}{\rho_{\tilde{T}}} \sup_{\|\tilde{x}\|_2 = \rho_{\tilde{T}}} \|J_T \tilde{x}\|_2.$$

Or, si on écrit le vecteur  $\tilde{x}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans la notation affine :  $\tilde{x} = \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2$  où  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  sont deux points du triangle  $\tilde{T}$  on obtient :

$$J_T \tilde{x} = \mathcal{S}_T(\tilde{A}_1) - \mathcal{S}_T(\tilde{A}_2) = A_1 - A_2,$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux points de  $T$ . D'où :

$$\|J_T \tilde{x}\|_2 = \|A_1 - A_2\|_2 \leq h_T.$$

Ainsi en particulier,

$$\|J_T\|_2 \leq \frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}.$$

2. Pour prouver cette inégalité, il suffit de reprendre la preuve de 1. en échangeant les rôles de  $\tilde{T}$  et  $T$ , constater que  $h_{\tilde{T}} = 1$  et d'utiliser (SR) qui nous donne  $\rho_T \geq \delta_0 h_T$ .

□

**Proposition 8.** *Avec les notations de la Proposition 7, considérons une fonction  $\tilde{v}$  appartenant à l'espace  $H^1(\tilde{T})$ . Définissons alors la fonction  $v$  sur un triangle  $T$  du maillage par :*

$$v = \tilde{v} \circ \mathcal{S}_T^{-1}.$$

Alors :

1.  $v$  appartient à  $H^1(T)$ ,
2.  $\|v\|_T^2 = |\det(J_T)|^{-1} \|\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2$ ,
3.  $\|\nabla v\|_T^2 \leq (|\det(J_T)| \delta_0^2 h_T^2)^{-1} \|\nabla \tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2$ ,
4.  $\|\nabla \tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2 \leq \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 |\det(J_T)| \|\nabla v\|_T^2$ .

*Démonstration.* Commençons par prouver 2. et 3., nous en déduirons ensuite 1.

2. Détaillons la norme  $\|v\|_T^2$ , puis posons le changement de variable  $\tilde{x} = \mathcal{S}_T^{-1}(x)$  :

$$\begin{aligned} \|v\|_T^2 &= \int_T |v(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \int_T |\tilde{v} \circ \mathcal{S}_T^{-1}(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \int_{\tilde{T}} |\tilde{v}(\tilde{x})|^2 |\det(J_T)|^{-1} d\mu(\tilde{x}) \\ &= |\det(J_T)|^{-1} \|\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2. \end{aligned}$$

3. Notons  $\nabla_x$  le gradient par rapport à la variable  $x$  et  $M^t$  la transposée d'une matrice quelconque  $M$ . En prenant  $\tilde{x} = \mathcal{S}^{-1}(x)$  et par la chain rule, on obtient :

$$\nabla_x v(x) = \nabla_x \tilde{v}(\tilde{x}) = (J_T^{-1})^t \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}(\tilde{x}).$$

Ainsi en utilisant que pour une matrice  $M$ ,  $\|M^t\|_2 = \|M\|_2$  et par le Lemme 1 on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla_x v\|_2^2 &= \|\nabla_x \tilde{v}\|_2^2 \\ &= \|(J_T^{-1})^t \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}\|_2^2 \\ &\leq \| (J_T^{-1})^t \|_2^2 \|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}\|_2^2 \\ &\leq \|J_T^{-1}\|_2^2 \|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}\|_2^2 \\ &\leq (\delta_0 h_T)^{-2} \|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}\|_2^2. \end{aligned}$$

Finalement, par le changement de variable  $\tilde{x} = \mathcal{S}_T^{-1}(x)$  :

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_T^2 &= \int_T \|\nabla_x v(x)\|_2^2 d\mu(x) \\
&= \int_T \|\nabla_x \tilde{v} \circ \mathcal{S}_T^{-1}(x)\|_2^2 d\mu(x) \\
&= |\det(J_T)|^{-1} \int_{\tilde{T}} \|\nabla_x \tilde{v}(\tilde{x})\|_2^2 d\mu(\tilde{x}) \\
&\leq |\det(J_T)|^{-1} (\delta_0 h_T)^{-2} \int_{\tilde{T}} \|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}(\tilde{x})\|_2^2 d\mu(\tilde{x}) \\
&\leq |\det(J_T)|^{-1} (\delta_0 h_T)^{-2} \|\nabla \tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2.
\end{aligned}$$

1. Le fait que la fonction  $v$  appartienne à l'espace  $H^1(T)$  se déduit aisément de 2. et 3.
4. Procédons de manière similaire à 3. on a, pour  $x = \mathcal{S}_T(\tilde{x})$  et  $\tilde{v} = v \circ \mathcal{S}_T$  et par la chain rule :

$$\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}(\tilde{x}) = J_T^t \nabla_x v(x).$$

Donc par le Lemme 1 :

$$\|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}\|_2^2 \leq \|J_T\|_2^2 \|\nabla_x v\|_2^2 \leq \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 \|\nabla_x v\|_2^2.$$

D'où finalement par changement de variable  $x = \mathcal{S}_T(\tilde{x})$  :

$$\begin{aligned}
\|\nabla \tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2 &= \int_{\tilde{T}} \|\nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}(\tilde{x})\|_2^2 d\mu(\tilde{x}) \\
&= |\det(J_T)| \int_T \|\nabla_{\tilde{x}} v(x)\|_2^2 d\mu(x) \\
&\leq |\det(J_T)| \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 \int_T \|\nabla_x v(x)\|_2^2 d\mu(x) \\
&\leq |\det(J_T)| \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 \|\nabla v\|_T^2.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. □

Notons  $\mathbb{P}_k$  l'ensemble des polynômes à deux variables, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à l'entier  $k$ . Plus précisément :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N} \\ i_1 + i_2 \leq k}} \alpha_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

L'espace  $\mathbb{P}_k$  est un espace vectoriel de dimension  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  (voir [6], Chap. 1.2.3). Ainsi un polynôme de  $\mathbb{P}_k$  est caractérisé par ses valeurs en  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  points. Nous appellerons treillis un tel ensemble de points. Afin de définir correctement un treillis sur chaque triangle  $T$  du maillage, définissons le treillis pour  $i$  et  $j$  deux entiers  $\{\tilde{x}_{i,j}\}_{i+j \leq k}$  sur le triangle de référence  $\tilde{T}$  par :

$$\tilde{x}_{i,j} = \left( \frac{i}{k\sqrt{2}}, \frac{j}{k\sqrt{2}} \right).$$

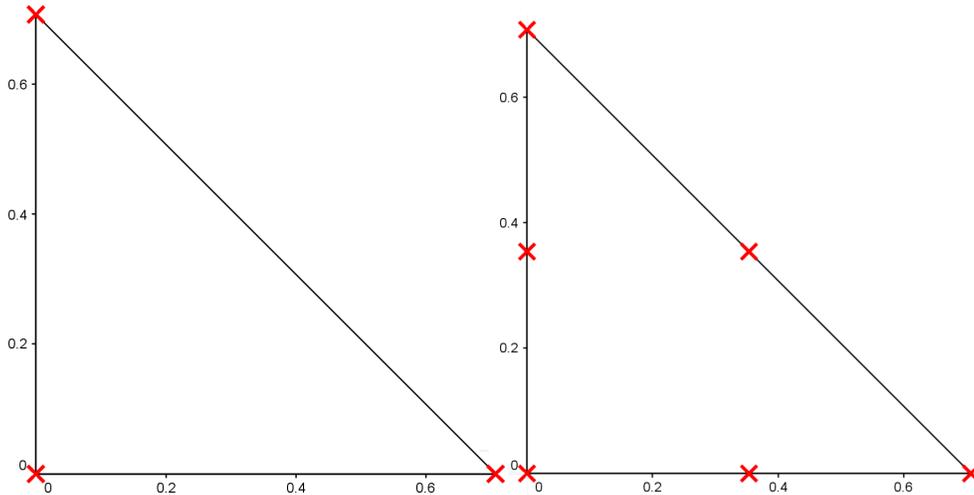


FIGURE 2.5 – A gauche le treillis pour les éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et à droite celui pour les éléments finis  $\mathbb{P}_2$ , sur le triangle de référence  $\tilde{T}$ .

Puis définissons (voir Figure 2.6) un treillis  $\{x_{i,j}\}_{0 \leq i,j \leq k}$  sur un triangle quelconque  $T$  du maillage par :

$$x_{i,j} = \mathcal{S}_T(\tilde{x}_{i,j}).$$

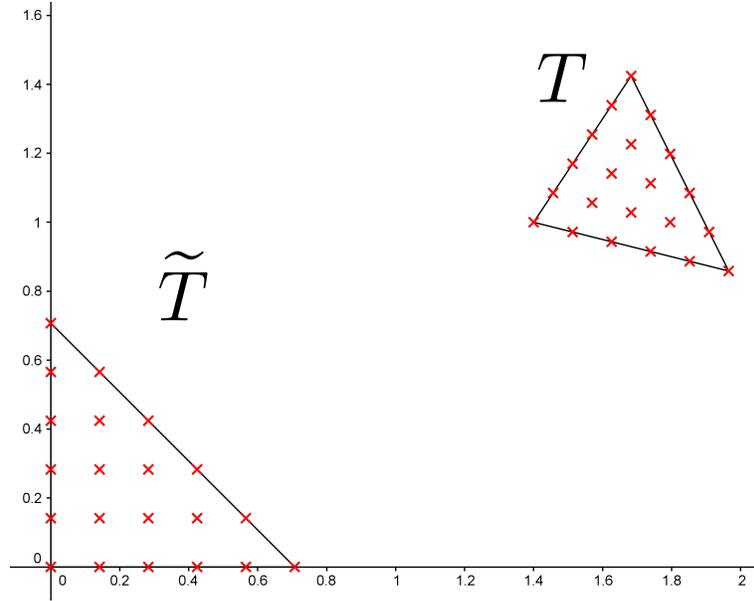


FIGURE 2.6 – On crée le treillis sur un triangle  $T$  quelconque comme l’image par l’application  $\mathcal{S}_T$  du treillis sur le triangle de référence  $\tilde{T}$ .

Nous appellerons noeud des degrés de liberté l’ensemble des treillis de chaque triangle du maillage, en ne comptant qu’une fois les points qui coïncident.

Introduisons maintenant les espaces d’approximation éléments finis : Appelons espace d’approximation élément finis (abrégé en EF  $\mathbb{P}_k$ ) associé à un maillage  $\mathcal{T}_h$ , un espace vectoriel  $V$  défini par :

$$V = \{v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ t.q. } v|_T \in \mathbb{P}_k \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ainsi, l’espace  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie (sa dimension étant égale au nombre de noeuds des degrés de liberté) et chaque fonction de  $V$  peut être identifiée au vecteur de ses valeurs en les noeuds des degrés de liberté.

Posons alors les trois espaces éléments finis suivants :

$$V_h^g \subseteq V_h \subset V_h^f.$$

L'espace  $V_h$  contiendra  $u_{V_h}$  la solution approchée de l'équation 2 et sera inclu dans un espace strictement plus grand,  $V_h^f$ . Il est important de noter que les trois espaces  $V_h^g$ ,  $V_h$  et  $V_h^f$  ne sont pas forcément définis sur le même maillage. Par exemple, on pourrait considérer que les espaces  $V_h^g$ ,  $V_h$  et  $V_h^f$  sont trois espaces EF  $\mathbb{P}_1$  mais associés à trois maillages  $\mathcal{T}_{h_g}$ ,  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}_{h_f}$  de plus en plus fins (i.e. avec par exemple  $h_g \geq h > h_f$ ). Cependant, dans ce cas là il faut tout de même supposer que lorsque l'on passe d'un maillage grossier à un maillage plus fin, les noeuds du maillage grossier sont encore des noeuds pour le maillage fin. Une autre possibilité est de considérer pour trois entiers  $k_1 \leq k_2 < k_3$ , les espaces  $V_h^g$ ,  $V_h$  et  $V_h^f$  comme des espaces EF  $\mathbb{P}_{k_1}$ ,  $\mathbb{P}_{k_2}$  et  $\mathbb{P}_{k_3}$  sur un même maillage  $\mathcal{T}_h$ . Notons au passage  $k_3 = k_{\max}$  le degré maximal des fonctions polynomiales de  $V_h^f$  (autrement dit  $V_h^f$  sera automatiquement supposé EF  $\mathbb{P}_{k_{\max}}$ ). Les résultats établis par la suite étant valables quels que soient  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  nous pouvons dès lors fixer les idées et considérer que  $V_h^g = V_h$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_1$  et que  $V_h^f$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_2$ .

### Espaces brisés

Nous aurons par la suite l'occasion de considérer des fonctions appartenant à tous les espaces locaux pour chaque triangle du maillage, par exemple  $H^1(T)$  pour tout triangle  $T$  du maillage  $\mathcal{T}_h$ . De telles fonctions n'appartiennent alors pas à  $H$ , mais à un espace plus grand qui sera appelé espace  $H^1$  brisé. Pour  $\mathcal{T}_h$  un maillage sur  $\Omega$ , on notera  $H_{\mathcal{T}_h}$  l'espace  $H^1$  brisé, défini par :

$$H_{\mathcal{T}_h} = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T) = \{\phi, \phi|_T \in H^1(T), T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ainsi,  $H_{\mathcal{T}_h}$  correspond à l'espace des fonctions  $H^1$  par morceaux sur chaque élément du maillage  $\mathcal{T}_h$ .

Cet espace peut être muni du produit scalaire  $L^2$  brisé défini pour  $v$  et  $w$  deux fonctions de  $H_{\mathcal{T}_h}$  par :

$$(v, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (v, w)_T.$$

Sa norme associée sera notée  $\|\cdot\|$ .

On définit de même le produit scalaire de l'énergie brisé par :

$$a(v, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a(v, w)_T,$$

ainsi que sa norme associée  $\|\cdot\|$ .

*Remarque* : On a en fait,  $H \subset H_{\mathcal{T}_h} \subset L^2(\Omega)$ . Ainsi, le produit scalaire  $L^2$  brisé n'est autre que le produit scalaire  $L^2$  classique. De même, sur  $H$  les produits scalaires et normes usuels et brisés coïncident, c'est pourquoi ils sont notés de façon similaire.

De la même manière, pour un sous-ensemble  $\Gamma$  de  $\mathcal{E}_h$  on définit le produit scalaire brisé  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  par :

$$\langle v, w \rangle_\Gamma = \sum_{E \in \Gamma} \langle v, w \rangle_E,$$

de norme associée  $|\cdot|_\Gamma$ .

Définissons également les espaces locaux et brisés correspondant aux espaces EF.

Si on note  $V_h(T)$  la restriction de  $V_h$  à  $T \in \mathcal{T}_h$ , on peut définir l'espace d'approximation brisé  $V_{\mathcal{T}_h}$  par :

$$V_{\mathcal{T}_h} = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} V_h(T).$$

On définit de manière similaire les espaces d'approximations  $V_h^g(T)$ ,  $V_h^f(T)$ ,  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  et  $V_{\mathcal{T}_h}^f$ .

*Remarque :*

- Si par exemple  $V_h^f$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_2$  alors  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  sera l'espace EF  $\mathbb{P}_2$  discontinu, c'est à dire EF  $\mathbb{P}_2$  auquel on a retiré l'hypothèse de continuité sur  $\mathcal{T}_h$ .
- On a les inclusions suivantes :

$$V_{\mathcal{T}_h}^g \subseteq V_{\mathcal{T}_h} \subset V_{\mathcal{T}_h}^f \subset H_{\mathcal{T}_h}.$$

- Les estimateurs d'erreur a posteriori appartiendront à l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^f$ .

## Interpolation

Pour faire un lien entre les différents espaces d'approximation, nous allons introduire un opérateur d'interpolation  $I$ .

**Définition 3.** *Définissons un opérateur d'interpolation polynomiale local :*

$$I : V_{\mathcal{T}_h}^f \longrightarrow V_{\mathcal{T}_h}^g.$$

*Et supposons que  $I$  vérifie :*

1. *pour  $v \in V_{\mathcal{T}_h}^g$ ,  $Iv = v$  ( $I$  agit comme l'identité sur  $V_{\mathcal{T}_h}^g$ ),*
2. *pour  $v \in V_{\mathcal{T}_h}^f$ ,  $Iv \in V_{\mathcal{T}_h}^g$  ( $I$  préserve la continuité sur  $\mathcal{T}_h$ ),*
3. *il existe une constante  $C_0$  dépendant des constantes  $\delta_0, \delta_1$ , des fonctions  $a, b$ , du degré maximum des polynômes appartenant à  $V_h$  ainsi que du choix particulier de l'interpolant  $I$ , mais ne dépendant pas du pas du maillage  $h$ , telle que :*

$$\sup_{\substack{v \in V_{\mathcal{T}_h}^f \\ v \neq 0}} \frac{|||Iv|||}{|||v|||} \leq C_0.$$

*Autrement dit, nous avons la continuité de l'opérateur  $I$  par rapport à la norme de l'énergie.*

*Remarque :* Considérons le cas particulier de l'interpolant de Lagrange, noté  $\mathcal{L}$ , lorsque l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_k$  et  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_{k_{\max}}$  avec  $k$  et  $k_{\max}$  deux entiers tels que  $k < k_{\max}$ . L'interpolant est défini pour une fonction  $v$  de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  sur  $T$  un triangle de  $\mathcal{T}_h$  par :

$$\mathcal{L}v \in V_h^g(T) \text{ et } \mathcal{L}v(\chi) = v(\chi),$$

pour tout  $\chi$  noeud des degrés de liberté de l'espace  $V_h^g(T)$  sur le triangle  $T$ .

Il est clair que l'interpolant de Lagrange  $\mathcal{L}$  vérifie les deux premiers points de la Définition 3. Vérifions que  $\mathcal{L}$  est continu de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  dans  $V_{\mathcal{T}_h}^g$ . Plaçons nous sur le triangle de référence  $\tilde{T}$ . L'application  $\mathcal{L}$  est une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $V_h^f(\tilde{T})$  dans un espace vectoriel normé  $V_h^g(\tilde{T})$  donc si on munit les espaces  $V_h^f(\tilde{T})$  et  $V_h^g(\tilde{T})$  de la norme :

$$\int_{\tilde{T}} b|\cdot|^2,$$

on obtient l'existence d'une constante  $\tilde{C}$  ne dépendant que du triangle  $\tilde{T}$ , de la norme considérée (donc de la fonction  $b$ ) et de  $\mathcal{L}$  telle que pour toute fonction  $\tilde{v}$  appartenant à  $V_h^f(\tilde{T})$  :

$$(2.2) \quad \int_{\tilde{T}} b|\mathcal{L}(\tilde{v})|^2 \leq \tilde{C} \int_{\tilde{T}} b|\tilde{v}|^2.$$

Il est également possible de montrer l'existence d'une constante  $\tilde{C}'$  dépendant uniquement de  $\tilde{T}$ , de la fonction  $a$ , du degré maximal des polynômes appartenant à l'espace  $V_h^f(\tilde{T})$ , c'est à dire  $k_{\max}$ , ainsi que de  $\mathcal{L}$  telle que :

$$(2.3) \quad \int_{\tilde{T}} a|\nabla\mathcal{L}(\tilde{v})|^2 \leq \tilde{C}' \int_{\tilde{T}} a|\nabla\tilde{v}|^2.$$

Considérons maintenant  $T$  un triangle quelconque du maillage, de diamètre  $h_T$ . Alors d'après la Proposition 7, il existe une application  $\mathcal{S}_T$  qui envoie  $\tilde{T}$  sur  $T$ . Si  $\tilde{v}$  est une fonction de  $V_h^f(\tilde{T})$  alors  $v = \tilde{v} \circ \mathcal{S}_T^{-1}$  est une fonction de  $V_h^f(T)$  et par une preuve similaire à celle de la Proposition 8 et en utilisant les inégalités (2.2) et (2.3) on obtient :

$$\begin{aligned}
|||\mathcal{L}(v)|||_T^2 &\leq |\det(J_T)|^{-1} \left( (\delta_0 h_T)^{-2} \int_{\tilde{T}} a |\nabla \mathcal{L}(\tilde{v}(\tilde{x}))|^2 d\mu(\tilde{x}) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tilde{T}} b |\mathcal{L}(\tilde{v}(\tilde{x}))|^2 d\mu(\tilde{x}) \right) \\
&\leq |\det(J_T)|^{-1} \left( (\delta_0 h_T)^{-2} \tilde{C}' \int_{\tilde{T}} a |\nabla \tilde{v}(\tilde{x})|^2 d\mu(\tilde{x}) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{C} \int_{\tilde{T}} b |\tilde{v}(\tilde{x})|^2 d\mu(\tilde{x}) \right) \\
&\leq |\det(J_T)|^{-1} \left( (\delta_0 h_T)^{-2} \tilde{C}' \left( \frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}} \right)^2 |\det(J_T)| \int_T a |\nabla v(x)|^2 d\mu(x) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{C} |\det(J_T)| \int_T b |v(x)|^2 d\mu(x) \right) \\
&\leq \max \left( (\delta_0 \rho_{\tilde{T}})^{-2} \tilde{C}', \tilde{C} \right) |||v|||_T^2
\end{aligned}$$

Enfin si l'on somme sur l'ensemble des triangles du maillage, on obtient l'inégalité globale :

$$|||\mathcal{L}(v)||| \leq C_{\mathcal{L}} |||v|||,$$

avec  $C_{\mathcal{L}} = \max \left( (\delta_0 \rho_{\tilde{T}})^{-2} \tilde{C}', \tilde{C} \right)$  constante dépendant de  $\delta_0$ , des fonctions  $a$  et  $b$ , de  $k_{\max}$  et de l'interpolant  $\mathcal{L}$ , mais indépendante du pas du maillage. On a donc bien montré que l'interpolant de Lagrange vérifiait en particulier les conditions de la Définition 3.

Grâce à l'interpolant  $I$  nous définissons, pour tout triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , l'espace local  $V_h^0(T)$  ainsi :

$$V_h^0(T) = \{v, v \in V_h^f(T) \text{ et } Iv = 0\} = \ker(I),$$

et comme précédemment, l'espace brisé associé :

$$V_{\mathcal{T}_h}^0 = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} V_h^0(T).$$

*Remarque :*

- Comme l'interpolant  $I$  est un projecteur, par le Théorème d'isomorphisme (voir par exemple [3]) on a :

$$(2.4) \quad V_{\mathcal{T}_h}^f = V_{\mathcal{T}_h}^g \oplus V_{\mathcal{T}_h}^0,$$

autrement dit, toute fonction  $v$  de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  se décompose de manière unique en :

$$v = v_g + v_0,$$

avec  $v_g$  dans  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  et  $v_0$  dans  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ .

- L'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  est en fait le sous-espace de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  des fonctions qui s'annulent en les noeuds des degrés de liberté de l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  (que nous appellerons également *points d'interpolation*). En effet, notons  $\tilde{V}_{\mathcal{T}_h}$  l'espace des fonctions de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  s'annulant sur tous les points d'interpolation, autrement dit :

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_h} = \{v \in V_{\mathcal{T}_h}^f \text{ t.q. } v(\chi) = 0, \forall \chi \text{ point d'interpolation,}\}.$$

Pour  $v$  appartenant à  $\tilde{V}_{\mathcal{T}_h}$ , si on considère  $w$  fonction de  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  telle que  $v(\chi) = w(\chi)$  pour tout  $\chi$  point d'interpolation alors  $Iw = w$  car  $w$  appartient à  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  et donc en particulier :

$$Iv(\chi) = Iw(\chi) = w(\chi) = 0.$$

D'où  $Iv \equiv 0$  et  $v$  appartient à  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ . Donc :

$$\tilde{V}_{\mathcal{T}_h} \subset V_{\mathcal{T}_h}^0.$$

Réciproquement, si  $v$  appartient à  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  alors supposons par l'absurde qu'il existe  $\chi$  un point d'interpolation tel que  $v(\chi) \neq 0$ . Si on considère  $w$  comme dans le cas précédent, on a en particulier  $w(\chi) \neq 0$ . Or,

$$Iv(\chi) = Iw(\chi) = w(\chi) \neq 0,$$

ce qui est absurde car  $v$  appartient à  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ . D'où finalement,

$$(2.5) \quad \tilde{V}_{\mathcal{T}_h} = V_{\mathcal{T}_h}^0.$$

**Théorème 2** (Interpolation locale). *Soient  $I$  l'interpolant de la Définition 3,  $T$  un triangle du maillage  $\mathcal{T}_h$  et  $v$  une fonction de  $V_h^f(T)$ . Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $v$ , de  $h_T$  et de  $T$  telle que :*

$$(2.6) \quad \|v - I(v)\|_T \leq Ch_T \|v - I(v)\|_T.$$

*Démonstration.* Soit  $\tilde{T}$  le triangle de référence. Sur l'espace de dimension finie  $V_h^0(\tilde{T})$  la semi-norme :

$$|\cdot|_{1,\tilde{T}} = \|\nabla \cdot\|_{\tilde{T}},$$

est en fait une norme (voir [2] Chap. 4.3.2). Donc par équivalence des normes, il existe une constante  $\tilde{C}$  dépendant de  $\tilde{T}$  uniquement telle que pour toute fonction  $\tilde{w}$  de  $V_h^0(\tilde{T})$  :

$$\|\tilde{w}\|_{\tilde{T}} \leq \tilde{C} \|\nabla \tilde{w}\|_{\tilde{T}}.$$

Soit maintenant  $T$  un triangle quelconque du maillage, de diamètre  $h_T$ . En utilisant l'application de scaling  $\mathcal{S}_T$  de la Proposition 7, si  $\tilde{w}$  appartient à l'espace  $V_h^0(\tilde{T})$  alors la fonction  $w = \tilde{w} \circ \mathcal{S}^{-1}$  appartient à  $V_h^0(T)$ . Puis, par la Proposition 8 on a :

$$\begin{aligned} \|w\|_T^2 &\leq |\det(J_T)|^{-1} \|\tilde{w}\|_{\tilde{T}}^2 \\ &\leq |\det(J_T)|^{-1} \tilde{C}^2 \|\nabla \tilde{w}\|_{\tilde{T}}^2 \\ &\leq \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 \tilde{C}^2 \|\nabla w\|_T^2. \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité (1.5) de la Proposition 3 nous donne :

$$\|w\|_T^2 \leq \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 \tilde{C}^2 \underline{a}^{-1} \|w\|_T^2.$$

On obtient alors le résultat en prenant  $v$  fonction de  $V_h^f(T)$  et  $w = v - I(v)$ .  $\square$

## 2.3 Problèmes discrets et erreurs d'approximation

Posons maintenant les problèmes discrets permettant de définir les approximations éléments finis et définissons les erreurs d'approximation correspondantes.

**Définition 4** (Solution continue et approximations EF). *Pour  $Q = H, V_h^g, V_h$  ou  $V_h^f$ , on définit  $u_Q$  fonction de  $Q$  comme vérifiant, pour toute fonction  $v$  de  $Q$  :*

$$(2.7) \quad a(u_Q, v) = (f, v) + \langle g, v \rangle.$$

*De plus, si  $b$  est identiquement nulle on supposera :*

$$(2.8) \quad (u_Q, 1) = 0,$$

*et que les fonctions  $f$  et  $g$  sont compatibles.*

*Remarque :* En appliquant le Théorème 1 comme nous l'avons fait pour la Proposition 6, nous pouvons montrer que les Problèmes (2.7) sont bien posés.

La fonction  $u_H$  ainsi définie est la solution faible du Problème 1 et les fonctions  $v_{V_h}, v_{V_h^g}$  et  $v_{V_h^f}$  sont différentes approximations EF de  $u_H$ . On notera par ailleurs,  $U$  appartenant à  $V_h$  l'approximation *calculée* de  $u_H$ .

Définissons alors les erreurs d'approximation par :

$$(2.9) \quad e_Q = u_Q - U,$$

pour  $Q = H, V_h^g, V_h$ , ou  $V_h^f$ .

**Définition 5** (Exactitude asymptotique). *Soit  $\bar{e}$  un estimateur d'erreur appartenant à un certain espace EF. On dira que l'estimateur  $\bar{e}$  est asymptotiquement exact si :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |||\bar{e}||| = |||e_H|||.$$

# Chapitre 3

## Résultats préliminaires

Etablissons dans ce chapitre quelques résultats notamment sur les erreurs d'approximation qui seront à la base de la construction des estimateurs d'erreur.

### 3.1 Inégalités classiques

Montrons maintenant des inégalités classiques, deux inégalités de trace et une inégalité inverse.

**Proposition 9.** *Soit  $T$  un triangle de  $\mathcal{T}_h$  et  $E$  une arête de  $\mathcal{E}^T$ . Alors il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que l'on ait les trois inégalités suivantes :*

$$(3.1) \quad |v|_{\mathcal{E}^T}^2 \leq C_1^2 (h_T^{-1} \|v\|_T^2 + h_T \|\nabla v\|_T^2), \quad \text{pour tout } v \in H^1(T).$$

$$(3.2) \quad \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\mathcal{E}^T}^2 \leq C_1^2 (h_T^{-1} \|\nabla v\|_T^2 + h_T \|\nabla^2 v\|_T^2), \quad \text{pour tout } v \in H^2(T).$$

$$(3.3) \quad \|\nabla^p v\|_T \leq C_2 h_T^{q-p} \|\nabla^q v\|_T, \quad \text{pour tout } v \in V_h^f \text{ et } 0 \leq q \leq p \leq k_{\max}.$$

où la constante  $C_1 = C_1(\delta_0, \delta_1)$  ne dépend que de (SR) (i.e. de  $\delta_0$ ) ainsi que de (QUL) (i.e. de  $\delta_1$ ) et où  $C_2$  dépend de (SR) et de  $k_{\max}$ , le degré maximal des polynômes de l'espace  $V_{\tilde{T}_h}^f$ . En particulier, ni  $C_1$  ni  $C_2$  ne dépendent de  $h$ .

*Démonstration.* Commençons par l'inégalité (3.1) et procédons encore une fois par scaling. Soit  $\tilde{T}$  le triangle de référence. Le Théorème de trace (voir [2], Chap. 4.3.3) affirme qu'il existe une constante  $\tilde{C}$  dépendant uniquement de  $\tilde{T}$  telle que pour toute fonction  $\tilde{v}$  de  $H^1(\tilde{T})$  on a :

$$(3.4) \quad |\tilde{v}|_{\mathcal{E}\tilde{T}} = |\tilde{v}|_{\partial\tilde{T}} \leq \tilde{C} \|\tilde{v}\|_{1,\tilde{T}} = \tilde{C} \sqrt{\|\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2 + \|\nabla\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2}.$$

Utilisons donc l'application  $\mathcal{S}_T$  pour nous ramener à un triangle  $T$  quelconque du maillage de diamètre  $h_T$ . Soit  $\tilde{v}$  fonction de  $H^1(\tilde{T})$ , posons  $v = \tilde{v} \circ \mathcal{S}_T^{-1}$ , c'est une fonction de  $H^1(T)$ . Par un changement de variable similaire à ceux de la Proposition 8 on a pour une arête  $E$  de  $\mathcal{E}^T$  et une arête  $\tilde{E}$  de  $\mathcal{E}^{\tilde{T}}$  telle que  $\mathcal{S}_T(\tilde{E}) = E$  :

$$|v|_E^2 = |\det(J_T)|^{-1} h_E^{-1} |\tilde{v}|_{\tilde{E}}^2.$$

Donc en utilisant la (QUL) et en sommant sur toutes les arêtes des triangles  $T$  et  $\tilde{T}$  on obtient :

$$|v|_{\mathcal{E}^T}^2 \leq |\det(J_T)|^{-1} \delta_1 h_T^{-1} |\tilde{v}|_{\mathcal{E}\tilde{T}}^2.$$

Puis, par (3.4) et par la Proposition 8 on a :

$$\begin{aligned} |v|_{\mathcal{E}^T}^2 &\leq |\det(J_T)|^{-1} \delta_1 h_T^{-1} |\tilde{v}|_{\tilde{E}}^2 \\ &\leq \tilde{C}^2 |\det(J_T)|^{-1} \delta_1 h_T^{-1} (\|\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2 + \|\nabla\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2) \\ &\leq \tilde{C}^2 |\det(J_T)|^{-1} \delta_1 h_T^{-1} \left( |\det(J_T)| \|v\|_T^2 + \left(\frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}}\right)^2 |\det(J_T)| \|\nabla v\|_T^2 \right), \\ &\leq \tilde{C}^2 \delta_1 \left( h_T^{-1} \|v\|_T^2 + \frac{h_T}{\rho_{\tilde{T}}^2} \|\nabla v\|_T^2 \right), \\ &\leq \tilde{C}^2 \delta_1 \max(1, \rho_{\tilde{T}}^{-2}) (h_T^{-1} \|v\|_T^2 + h_T \|\nabla v\|_T^2). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité voulue avec la constante  $C_1 = (\tilde{C}^2 \delta_1 \max(1, \rho_{\tilde{T}}^{-2}))^{1/2}$  qui dépend uniquement de  $\delta_0$  et  $\delta_1$  (puisque  $\delta_1$  dépend de  $\delta_0$ ).

Pour l'inégalité (3.2), il suffit d'appliquer (3.1) à  $\nabla v$  composante par composante, ses composantes appartenant bien à  $H^1(T)$  si  $v$  est supposée dans  $H^2(T)$ .

L'inégalité (3.3) est une inégalité inverse (voir [6], Chap. 1.7). En effet, comme l'espace  $V_h^f$  est de dimension finie, toutes les normes sur  $V_h^f$  sont équivalentes. On a donc en particulier, sur le triangle de référence  $\tilde{T}$  l'existence d'une constante  $\tilde{C}_{1,0}$  dépendant de  $\tilde{T}$  telle que pour toute fonction  $\tilde{v}$  de  $V_h^f(\tilde{T})$  :

$$\sqrt{\|\tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2 + \|\nabla \tilde{v}\|_{\tilde{T}}^2} \leq \tilde{C}_{1,0} \|\tilde{v}\|_{\tilde{T}},$$

d'où en particulier :

$$\|\nabla \tilde{v}\|_{\tilde{T}} \leq \tilde{C}_{1,0} \|\tilde{v}\|_{\tilde{T}}.$$

Par Scaling et la Proposition 8 en posant  $v = \tilde{v} \circ \mathcal{S}_T^{-1}$  on a :

$$(3.5) \quad \|\nabla v\|_T \leq C_{1,0} h_T^{-1} \|v\|_T,$$

avec  $C_{1,0} = \delta_0^{-1/2}$ .

Appliquons maintenant l'inégalité (3.5) aux fonctions  $\nabla^k v$  pour tout entier  $k$  tel que  $k \leq k_{\max}$ , on a :

$$(3.6) \quad \|\nabla^{k+1} v\|_T \leq C_{k+1,k} h_T^{-1} \|\nabla^k v\|_T.$$

avec les constantes  $C_{k+1,k}$  qui ne dépendent que de  $\delta_0$ .

Enfin de proche en proche, pour tout entier  $l$  tel que  $l \leq k$  on a :

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad \|\nabla^{k+1}v\|_T &\leq C_{k+1,k}h_T^{-1}\|\nabla^k v\|_T \\
&\leq C_{k+1,k}C_{k,k-1}h_T^{-2}\|\nabla^{k-1}v\|_T \\
&\leq \dots \\
&\leq \prod_{i=k+1-l}^k (C_{i+1,i})h_T^{-l}\|\nabla^{k+1-l}v\|_T
\end{aligned}$$

où les constantes  $C_{k,l}$  dépendent de  $\delta_0$  uniquement.

Si l'on récapitule, on a montré l'existence d'un nombre fini de constantes  $C_{p,q}$  pour  $1 \leq q \leq p \leq k_{\max}$  qui ne dépendent pas de  $h_T$  et telles que :

$$(3.8) \quad \|\nabla^p v\|_T \leq C_{p,q}h_T^{q-p}\|\nabla^q v\|_T.$$

Comme les constantes  $C_{p,q}$  sont en nombre fini, on peut poser  $C_2 = \max_{1 \leq q \leq p \leq k_{\max}} (C_{p,q})$ .

Ainsi on a montré l'existence d'une constante  $C_2$  dépendant de  $k_{\max}$  ainsi que de  $\delta_0$  telle que :

$$(3.9) \quad \|\nabla^p v\|_T \leq C_2 h_T^{q-p} \|\nabla^q v\|_T.$$

□

Nous aurons également besoin de poser la conjecture suivante :

**Conjecture 1.** *Il existe  $\beta = \beta(h)$  à valeurs réelles tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} \beta = 0$  et tel que l'on ait l'estimation suivante :*

$$(3.10) \quad \left\| \|u_H - u_{V_h^f}\| \right\|^2 + \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial (u_H - u_{V_h^f})}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I}^2 \leq \beta^2 \left\| \|u_H - u_{V_h}\| \right\|^2.$$

## 3.2 Résultats sur les erreurs d'approximation

Certains résultats ne seront valides que si l'on suppose une hypothèse supplémentaire sur l'espace  $V_h^g$  :

**Hypothèse 1** (importante). *Pour toute fonction  $v$  dans  $V_h^g$  :*

$$(3.11) \quad a(e_{V_h}, v) = a(u_{V_h} - U, v) = 0,$$

autrement dit la projection elliptique de l'erreur  $e_{V_h}$  sur  $V_h^g$  est nulle.

*Remarque :* L'identité (3.11) tient par exemple si  $U = u_{V_h}$ . Cette identité signifie intuitivement que l'espace grossier  $V_h^g$  ne va pas distinguer la fonction  $u_{V_h}$  de son approximation calculée  $U$ . En particulier, si  $V_h^g = V_h$  comme  $u_{V_h}$  appartient à  $V_h$ , l'hypothèse (3.11) signifie que les fonctions  $u_{V_h}$  et  $U$  seront considérées comme égales.

Posons  $r$  et  $r_B$  les fonctions résidus définies par :

$$r = f - L(U), \quad \text{et} \quad r_B = g - a \frac{\partial U}{\partial n},$$

et définissons la forme linéaire locale  $F_T$  sur  $Q_T = H(T), V_h^g(T), V_h(T), V_h^f(T)$  par :

$$F_T(v) = (r, v)_T + \langle r_B, v \rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} + \frac{1}{2} \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I}.$$

On notera, pour  $v$  appartenant à  $Q = H, V_h^g, V_h, V_h^f$ ,

$$F(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} F_T(v)$$

la forme linéaire globale. Cette forme linéaire sera alors prolongée à  $Q_{\mathcal{T}_h} = H_{\mathcal{T}_h}, V_{\mathcal{T}_h}, V_{\mathcal{T}_h}^g$  ou  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  par :

$$F(v) = (r, v) + \langle r_B, v \rangle + \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}.$$

La proposition suivante permet de caractériser l'erreur d'approximation  $e_Q$  (où  $Q = H, V_h, V_h^g$ , ou  $V_h^f$ ) et sera à la base de la construction des estimateurs d'erreur a posteriori que nous verrons par la suite :

**Proposition 10** (Caractérisation des erreurs d'approximation). *Pour toute fonction  $v$  de  $Q = H, V_h^g, V_h, V_h^f$  on a :*

$$(3.12) \quad a(e_Q, v) = F(v).$$

*Démonstration.* Considérons pour  $v$  dans  $Q$ . Comme  $u_Q$  est la solution du Problème (2.7) on a :

$$\begin{aligned} a(e_Q, v) &= a(u_Q - U, v) \\ &= (f, v) + \langle g, v \rangle - a(U, v). \end{aligned}$$

Ecrivons le terme  $a(U, v)$ . Comme les espaces  $Q$  sont tous des sous-espaces de  $H$ , la fonction  $v$  appartient en particulier à  $H^1(T)$  pour tout triangle  $T$  du maillage. Par ailleurs, la fonction  $U$  est polynômiale sur chaque triangle  $T$  donc en particulier dans  $H^2(T)$  et on peut donc appliquer la Proposition 5 :

$$\begin{aligned} a(U, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \int_T (-\operatorname{div}(a\nabla U) + bU)v + \int_{\varepsilon^T} a \frac{\partial U}{\partial n_T} v \right). \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( (L(U), v)_T + \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\varepsilon^T} \right). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a(e_Q, v) &= (f, v) + \langle g, v \rangle \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( (L(U), v)_T + \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T} \right) \\
&= (f, v) + \langle g, v \rangle - (L(U), v) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T},
\end{aligned}$$

le dernier terme revient à sommer sur toutes les arêtes de tous les triangles du maillage, donc en extrayant de cette dernière somme la somme sur les arêtes du bord on obtient :

$$\begin{aligned}
a(e_Q, v) &= (f, v) - (L(U), v) + \langle g, v \rangle - \sum_{E \in \mathcal{E}_h^B} \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n}, v \right\rangle_E \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \\
&= (f - L(U), v) + \langle g, v \rangle - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \\
&= (r, v) + \langle r_B, v \rangle - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I}.
\end{aligned}$$

Pour une arête intérieure  $E$ , notons  $w_{\text{in}}$  et  $w_{\text{out}}$  les restrictions d'une fonction  $w$  à  $T_{\text{in}}$  et  $T_{\text{out}}$ . Comme  $v$  est continue alors sur  $E$  on a :  $v_{\text{in}} = v_{\text{out}}$ . Maintenant en réécrivant la somme précédente sur les triangles en une somme sur les arêtes intérieures on a,

$$\begin{aligned}
-\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} &= -\sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left( \left\langle a \frac{\partial U_{\text{out}}}{\partial n_{T_{\text{out}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \left\langle a \frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E \right) \\
&= -\sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left\langle \left( a \frac{\partial U_{\text{out}}}{\partial n_{T_{\text{out}}}} + a \frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}} \right), v \right\rangle_E \\
&= -\sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left\langle \left( a \frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}} - a \frac{\partial U_{\text{out}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}} \right), v \right\rangle_E \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left\langle \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right], v \right\rangle_E \\
&= \left\langle a \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right], v \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
a(e_Q, v) &= (r, v) + \langle r_B, v \rangle + \left\langle a \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right], v \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( (r, v)_T + \langle r_B, v \rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left\langle a \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right], v \right\rangle_E,
\end{aligned}$$

lorsque l'on réécrit cette dernière somme comme portant sur les triangles du maillage et non plus sur les arêtes intérieures, un coefficient 2 apparaît du fait que chaque arête intérieure est partagée entre deux triangles. Plus précisément on a :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right], v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} = 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left\langle a \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right], v \right\rangle_E.$$

Donc :

$$\begin{aligned} a(e_Q, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( (r, v)_T + \langle r_B, v \rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} + \frac{1}{2} \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} F_T(v). \end{aligned}$$

□

Cette caractérisation de l'erreur  $e_Q$  implique, si on note  $e_H - e_Q = u_H - u_Q$  les relations d'orthogonalité suivantes :

**Proposition 11.** *Pour  $v \in Q = V_h, V_h^g$ , ou  $V_h^f$  :*

$$(3.13) \quad a(e_H - e_Q, v) = 0.$$

*Pour  $v \in Q = V_h$  ou  $V_h^g$  :*

$$(3.14) \quad a(e_{V_h^f} - e_Q, v) = 0.$$

*Et finalement, pour  $v \in V_h^g$  :*

$$(3.15) \quad a(e_{V_h} - e_{V_h^g}, v) = 0.$$

*Démonstration.* Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  pouvant représenter n'importe lesquels des espaces  $H, V_h, V_h^g$  ou  $V_h^f$  avec comme seule condition que l'on ait toujours  $Q_2 \subset Q_1$ . Soit alors  $v \in Q_2$ , par (3.12) on a :

$$a(e_{Q_1} - e_{Q_2}, v) = F(v) - F(v) = 0.$$

d'où les relations d'orthogonalité (3.13), (3.14) et (3.15).

□

Ces relations d'orthogonalité impliquent les égalités de normes suivantes :

**Proposition 12.** *Pour  $Q = V_h, V_h^f$  ou  $V_h^g$  on a :*

$$(3.16) \quad |||e_H|||^2 = |||e_Q|||^2 + |||e_H - e_Q|||^2,$$

et pour  $Q = V_h$  ou  $V_h^g$  :

$$(3.17) \quad |||e_{V_h^f}|||^2 = |||e_Q|||^2 + |||e_{V_h^f} - e_Q|||^2.$$

Et finalement,

$$(3.18) \quad |||e_{V_h}|||^2 = |||e_{V_h^g}|||^2 + |||e_{V_h} - e_{V_h^g}|||^2.$$

*Démonstration.* Reprenons les notations de la preuve précédente, comme  $a$  est symétrique et par les relations d'orthogonalité précédentes on a :

$$\begin{aligned} |||e_{Q_1} - e_{Q_2}|||^2 + |||e_{Q_2}|||^2 &= a(e_{Q_1} - e_{Q_2}, e_{Q_1} - e_{Q_2}) + a(e_{Q_2}, e_{Q_2}) \\ &= a(e_{Q_1}, e_{Q_1}) - a(e_{Q_2}, e_{Q_1}) - a(e_{Q_2}, e_{Q_1}) \\ &\quad + a(e_{Q_2}, e_{Q_2}) + a(e_{Q_2}, e_{Q_2}) \\ &= |||e_{Q_1}|||^2 - 2a(e_{Q_1} - e_{Q_2}, e_{Q_2}) \\ &= |||e_{Q_1}|||^2, \end{aligned}$$

d'où les égalités (3.16), (3.17) et (3.18). □

*Remarque :* L'égalité (3.17) peut sembler étrange puisque, comme l'espace éléments finis  $V_h^f$  est plus «fin» que  $V_h$ , on peut s'attendre à ce que la norme  $|||e_{V_h^f}|||$  soit plus petite que  $|||e_{V_h}|||$ . Cependant, il faut garder à l'esprit que l'erreur  $e_{V_h} = u_{V_h} - U$  quantifie l'erreur commise lors de l'implémentation de la fonction  $u_{V_h}$ , ainsi on peut raisonnablement s'attendre à ce que cette erreur soit minime (voire idéalement, nulle) et donc, en norme, inférieure à  $|||e_{V_h^f}|||$ .

Caractérisons maintenant de manière analogue à (3.12), le produit scalaire  $a(e_H, v)$  pour  $v$  dans  $H_{\mathcal{T}_h}$ .

**Proposition 13.** *L'erreur  $e_H$  vérifie pour tout  $v$  dans  $H_{\mathcal{T}_h}$  l'équation :*

$$(3.19) \quad a(e_H, v) = F(v) - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}.$$

*Démonstration.* Soit  $T$  un triangle du maillage, écrivons le produit scalaire local  $a(e_H, v)_T$ . Par régularité elliptique (voir [7], Chap. 2.3), comme  $f$  appartient à  $L^2(\Omega)$  et  $g$  à  $L^2(\partial\Omega)$ ,  $u_H$  appartient à  $H^2(\Omega)$  et par conséquent  $e_H$  appartient à  $H^2(\Omega)$  et donc à  $H^2(T)$ . Donc par la Proposition 5 on a :

$$a(e_H, v)_T = \int_T (-\operatorname{div}(a\nabla e_H) + b e_H)v + \int_{\mathcal{E}^T} a \frac{\partial e_H}{\partial n_T} v,$$

puis en décomposant l'intégrale sur  $\mathcal{E}^T$  entre arêtes sur le bord et arêtes intérieures et en utilisant la définition de  $e_H$ , on obtient :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} a(e_H, v)_T &= \int_T (-\operatorname{div}(a\nabla u_H) + b u_H)v - \int_T (-\operatorname{div}(a\nabla U) + b U)v \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} a \frac{\partial u_H}{\partial n_T} v - \int_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} a \frac{\partial U}{\partial n_T} v \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} a \frac{\partial e_H}{\partial n_T} v \\ &= (f, v)_T - (L(U), v)_T + \langle g, v \rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} - \left\langle a \frac{\partial U}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} \\ &\quad + \left\langle a \frac{\partial e_H}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \\ &= (r, v)_T + \langle r_B, v \rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^B} + \left\langle a \frac{\partial e_H}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I}. \end{aligned}$$

Si on somme sur les éléments du maillage, le troisième terme devient alors :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \left\langle a \frac{\partial e_H}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \right) = \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}.$$

Avant de démontrer cette égalité commençons par vérifier que pour une arête  $E$  du maillage :

$$(3.21) \quad \left[ \left[ \frac{\partial e_H}{\partial n} \right] \right]_E = - \left[ \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right]_E,$$

où  $\llbracket \cdot \rrbracket_E$  désigne le saut sur l'arête  $E$ . On a supposé que  $f$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  donc par régularité elliptique, la fonction  $u_H$  appartient à  $H^2(\Omega)$ . On peut donc montrer par l'absurde que :

$$\left[ \left[ \frac{\partial u_H}{\partial n} \right] \right]_E = 0.$$

Ainsi, on a l'égalité (3.21) et si on note pour une fonction  $v$ ,  $v_{\text{out}}$  et  $v_{\text{in}}$  les restrictions de  $v$  à  $T_{\text{out}}$  et à  $T_{\text{in}}$ , alors sur chaque arête intérieure  $E$  on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_E - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_E &= - \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_E - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_E \\ &= - \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}} - a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, \frac{1}{2} v_{\text{out}} + \frac{1}{2} v_{\text{in}} \right\rangle_E \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{2} a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}} + \frac{1}{2} a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{out}} - v_{\text{in}} \right\rangle_E \\ &= - \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E - \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \frac{1}{2} \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E \\ &= - \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E. \end{aligned}$$

En changeant le sens de la normale on a :

$$-\frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}} = \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{out}}}}.$$

D'où :

$$\left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_E - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_E = \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{out}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E.$$

Si on somme sur toutes les arêtes intérieures, chaque arête sera comptée deux fois (une fois depuis  $T_{\text{in}}$  et une fois depuis  $T_{\text{out}}$ ), ainsi on peut transformer cette somme en somme sur les triangles puisque, ce faisant chaque arête sera également comptée deux fois, une fois pour chaque triangle partageant cette arête. Donc :

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left( \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{out}}}}{\partial n_{T_{\text{out}}}}, v_{\text{out}} \right\rangle_E + \left\langle a \frac{\partial e_{H_{\text{in}}}}{\partial n_{T_{\text{in}}}}, v_{\text{in}} \right\rangle_E \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \left\langle a \frac{\partial e_H}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \right). \end{aligned}$$

Finalement, à partir de (3.20) on obtient l'équation globale suivante :

$$\begin{aligned} a(e_H, v) &= (r, v) + \langle r_B, v \rangle + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\langle a \frac{\partial e_H}{\partial n_T}, v \right\rangle_{\mathcal{E}^T \cap \mathcal{E}_h^I} \\ &= (r, v) + \langle r_B, v \rangle + \left\langle \left[ \left[ a \frac{\partial U}{\partial n} \right] \right], \{v\} \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \\ &= F(v) - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}, \end{aligned}$$

pour toute fonction  $v$  dans  $H_{\mathcal{T}_h}$ .

□

*Remarque :*

- L'article original semble contenir une erreur lors de la définition de l'équation globale, le terme de droite étant :

$$F(v) - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I},$$

et non :

$$F(v) + \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I},$$

cette erreur n'a visiblement pas d'influence sur le reste de l'article.

- Lorsque la fonction  $v$  appartient à  $H$ , l'égalité (3.19) redevient l'égalité (3.12).

Donnons maintenant quelques résultats concernant les estimations d'erreur.

**Lemme 2.** *Supposons que l'on ait les inégalités (3.2), (3.3) et la Conjecture 1. Alors,*

$$\left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} \leq C_3 \| \| e_H \| \|,$$

avec  $C_3$  dépendant de  $\underline{a}$ ,  $\bar{a}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\delta_1$  et  $\beta$ .

*Démonstration.* En écrivant :

$$e_H = u_H - U = u_H - u_{V_h^f} + u_{V_h^f} - U = u_H - u_{V_h^f} + e_{V_h^f},$$

on obtient par inégalité triangulaire :

$$(3.22) \quad \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} \leq \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} + \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial (u_H - u_{V_h^f})}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I}.$$

Le second terme peut être majoré en utilisant la Conjecture 1 :

$$\left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial(u_H - u_{V_h^f})}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} \leq \beta \| \|u_H - u_{V_h^f} \| \|.$$

Puis en utilisant le fait que  $u_H - u_{V_h^f} = e_H - e_{V_h^f}$  et la relation d'orthogonalité (3.13) on obtient :

$$(3.23) \quad \| \|u_H - u_{V_h^f} \| \| \leq \| \|e_H \| \|.$$

Etudions maintenant le premier terme localement sur chaque arête  $E$  de  $\mathcal{E}_h^I$  telle que  $T_{\text{in}} \cap T_{\text{out}} = E$ . Par définition de la moyenne, par inégalité triangulaire et par convexité de la fonction carré on a :

$$\begin{aligned} \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \right\} \right|_E^2 &= \left| \frac{h_E^{1/2}}{2} \left( a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_{T_{\text{in}}} + a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_{T_{\text{out}}} \right) \right|_E^2 \\ &\leq \frac{h_E}{4} \left( \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_{T_{\text{in}}} \right|_E + \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_{T_{\text{out}}} \right|_E \right)^2 \\ &\leq \frac{h_E}{2} \left( \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_{T_{\text{in}}} \right|_E^2 + \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_{T_{\text{out}}} \right|_E^2 \right). \end{aligned}$$

Regardons donc le terme  $\left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_T \right|_E^2$  pour un triangle  $T$  quelconque de  $\mathcal{T}_h$ .

Par l'inégalité (3.2) et puisque  $a(x) \leq \bar{a}$  pour tout  $x$  dans  $\bar{\Omega}$  on a :

$$h_E \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_T \right|_E^2 \leq h_E \bar{a}^2 C_1^2 \left( h_T^{-1} \| \nabla e_{V_h^f} \|_T^2 + h_T \| \nabla^2 e_{V_h^f} \|_T^2 \right).$$

De plus, par (3.3) :

$$h_T \| \nabla^2 e_{V_h^f} \|_T^2 \leq C_2^2 h_T^{-1} \| \nabla e_{V_h^f} \|_T^2.$$

Donc par les deux inégalités précédentes ainsi que par l'inégalité (2) de (QUL) et l'inégalité (1.5) locale :

$$\begin{aligned}
h_E \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \Big|_T \right|^2 &\leq h_E \bar{a}^2 C_1^2 \left( h_T^{-1} \|\nabla e_{V_h^f}\|_T^2 + C_2^2 h_T^{-1} \|\nabla e_{V_h^f}\|_T^2 \right) \\
&\leq \frac{h_E}{h_T} \bar{a}^2 C_1^2 (1 + C_2^2) \|\nabla e_{V_h^f}\|_T^2 \\
&\leq \delta_1 \bar{a}^2 C_1^2 (1 + C_2^2) \|\nabla e_{V_h^f}\|_T^2 \\
&\leq \delta_1 \bar{a}^2 \underline{a}^{-1} C_1^2 (1 + C_2^2) \|e_{V_h^f}\|_T^2
\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant cette dernière inégalité à  $T = T_{\text{in}}$  et  $T = T_{\text{out}}$  on obtient une majoration de la norme de la moyenne :

$$(3.24) \quad \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \right\} \Big|_E \right|^2 \leq \frac{1}{2} \delta_1 \bar{a}^2 \underline{a}^{-1} C_1^2 (1 + C_2^2) \left( \|e_{V_h^f}\|_{T_{\text{in}}}^2 + \|e_{V_h^f}\|_{T_{\text{out}}}^2 \right).$$

Il reste à sommer sur l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{E}_h^I$ . On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} \left( \|e_{V_h^f}\|_{T_{\text{in}}}^2 + \|e_{V_h^f}\|_{T_{\text{out}}}^2 \right) &\leq 3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|e_{V_h^f}\|_T^2 \\
&\leq 3 \|e_{V_h^f}\|^2,
\end{aligned}$$

puisque chaque triangle possède au plus trois arêtes. Donc en sommant (3.24) sur  $\mathcal{E}_h^I$  on obtient :

$$(3.25) \quad \left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \right\} \Big|_{\mathcal{E}_h^I} \right|^2 \leq \frac{3}{2} \delta_1 \bar{a}^2 \underline{a}^{-1} C_1^2 (1 + C_2^2) \|e_{V_h^f}\|^2,$$

Finalement, en majorant chaque terme du membre de droite de (3.22) on obtient :

$$\left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} \leq \left( \frac{3}{2} \delta_1 \bar{a}^2 \underline{a}^{-1} C_1^2 (1 + C_2^2) \right)^{1/2} \|e_{V_h^f}\| + \beta \|e_H\|,$$

puis comme  $u_H - u_{V_h^f} = e_H - e_{V_h^f}$ , par inégalité triangulaire et par (3.23) on a :

$$\begin{aligned} \|e_{V_h^f}\| &\leq \|e_H\| + \|u_H - u_{V_h^f}\| \\ &\leq 2\|e_H\|. \end{aligned}$$

D'où :

$$\left| h_E^{1/2} \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} \leq C_3 \|e_H\|,$$

avec :

$$C_3 = (6\delta_1 \bar{a}^2 \underline{a}^{-1} C_1^2 (1 + C_2^2))^{1/2} + \beta.$$

□

*Remarque* : Il semblerait que la preuve de ce lemme dans l'article original contienne quelques coquilles, notamment lors de la majoration du terme  $h_E \left| a \frac{\partial e_{V_h^f}}{\partial n} \right|_T \Big|_E^2$  ainsi que plus loin vers la fin de la preuve. C'est pourquoi la preuve présentée ici diffère de celle de l'article. Cette différence implique notamment une constante  $C_3$  différente de la constante  $C_3$  originale.

**Lemme 3.** Soit  $v$  une fonction de  $H_{\mathcal{T}_h}$ . Supposons que pour tout triangle  $T$  du maillage,

$$\|v\|_T \leq C_4 h_T \|v\|_T,$$

où  $C_4$  est indépendant de  $T$  et de  $v$ . Alors,

$$|h_E^{-1/2} \llbracket v \rrbracket|_{\mathcal{E}_h^i} \leq C_5 \|v\|_T,$$

avec  $C_5$  dépendant de  $C_1$ ,  $C_4$ ,  $\underline{a}$  et  $\delta_1$ .

*Démonstration.* Soit  $E$  une arête intérieure. On a par inégalité triangulaire, puis par inégalité de Young :

$$\begin{aligned} |\llbracket v \rrbracket|_E^2 &= |v|_{T_{\text{out}}} - v|_{T_{\text{in}}}|_E^2 \\ (3.26) \quad &\leq (|v|_{T_{\text{out}}}|_E + |v|_{T_{\text{in}}}|_E)^2 \\ &\leq 2 (|v|_{T_{\text{out}}}|_E^2 + |v|_{T_{\text{in}}}|_E^2). \end{aligned}$$

Or par l'inégalité (3.1),

$$(3.27) \quad |v|_T|_E^2 \leq C_1^2 (h_T^{-1} \|v\|_T^2 + h_T \|\nabla v\|_T^2).$$

De plus, par hypothèse,

$$(3.28) \quad h_T^{-1} \|v\|_T^2 \leq C_4^2 h_T \|v\|_T^2,$$

D'où en majorant chaque terme de droite de l'inégalité (3.27) grâce à (3.28) et (1.5) et en utilisant l'inégalité (2) de (*QUL*) on obtient :

$$\begin{aligned} |v|_T|_E^2 &\leq C_1^2 (C_4^2 h_T \|v\|_T^2 + \underline{a}^{-1} h_T \|v\|_T^2) \\ &\leq C_1^2 (C_4^2 + \underline{a}^{-1}) \delta_1 h_E \|v\|_T^2. \end{aligned}$$

Ainsi en majorant l'inégalité (3.26) et en divisant par  $h_E$ ,

$$\left| h_E^{-1/2} \llbracket v \rrbracket \right|_E^2 \leq C_1^2 (C_4^2 + \underline{a}^{-1}) \delta_1 (|||v|||_{T_{\text{out}}}^2 + |||v|||_{T_{\text{in}}}^2).$$

Puis si l'on somme sur toutes les arêtes intérieures :

$$\left| h_E^{-1/2} \llbracket v \rrbracket \right|_{\mathcal{E}_h^I}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h^I} C_1^2 (C_4^2 + \underline{a}^{-1}) \delta_1 (|||v|||_{T_{\text{out}}}^2 + |||v|||_{T_{\text{in}}}^2),$$

et lorsque l'on change la somme sur les arêtes intérieures en somme sur les triangles, comme chaque triangle était compté trois fois, un coefficient 3 apparaît, de plus on ne distinguera plus  $T_{\text{out}}$  et  $T_{\text{in}}$  ce qui fera apparaître également un coefficient 2. Donc :

$$\left| h_E^{-1/2} \llbracket v \rrbracket \right|_{\mathcal{E}_h^I}^2 \leq 6C_1^2 (C_4^2 + \underline{a}^{-1}) \delta_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |||v|||_T^2.$$

d'où le lemme. □

**Lemme 4.** *Supposons que la Conjecture 1 est vérifiée et que  $\beta < 1$ . Alors,*

$$(1 - \beta^2)^{1/2} |||e_H||| \leq |||e_{V_h^f}|||.$$

*Démonstration.* Majorons la norme  $|||e_H|||^2$ , par (3.16) avec  $Q = V_h^f$ , (1) et de nouveau par (3.16) avec  $Q = V_h$  :

$$\begin{aligned} |||e_H|||^2 &= |||e_{V_h^f}|||^2 + |||e_H - e_{V_h^f}|||^2 \\ &\leq |||e_{V_h^f}|||^2 + \beta^2 |||e_H - e_{V_h}|||^2 \\ &\leq |||e_{V_h^f}|||^2 + \beta^2 |||e_H|||^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Donnons maintenant une inégalité de Cauchy-Schwarz renforcée pour la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ . Des résultats plus généraux sur ce type d'inégalités sont trouvables dans [1] au Chapitre 5.5.

**Lemme 5.** *Il existe une constante  $\gamma < 1$  dépendant de  $\delta_0, \delta_1, a, b$ , du degré maximal des polynômes de  $V_h^f$  ainsi que du choix particulier de l'interpolant  $I$  mais indépendant du pas du maillage  $h$ , telle que :*

$$|a(\underline{v}, v^0)| \leq \gamma \|\underline{v}\| \|v^0\|,$$

pour tout  $\underline{v}$  dans  $V_{\mathcal{T}_h}^g$  et tout  $v^0$  dans  $V_{\mathcal{T}_h}^0$

*Démonstration.* Soient  $\underline{v} \in V_{\mathcal{T}_h}^g$  et  $v^0 \in V_{\mathcal{T}_h}^0$  fixés et posons  $v_t \in V_{\mathcal{T}_h}^f$  tel que :

$$v_t = \underline{v} + tv^0,$$

ce qui est possible d'après (2.4).

D'après la Définition 3,  $Iv_t = \underline{v}$  et :

$$\|\underline{v}\|^2 = \|Iv_t\|^2 \leq C_0^2 \|v_t\|^2.$$

Développons le côté droit de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} \|\underline{v}\|^2 &\leq C_0^2 a(\underline{v} + tv^0, \underline{v} + tv^0) \\ &\leq C_0^2 \|\underline{v}\|^2 + 2ta(\underline{v}, v^0) + t^2 a(v^0, v^0). \end{aligned}$$

D'où :

$$t^2 \|v^0\|^2 + 2ta(\underline{v}, v^0) + \left(1 - \frac{1}{C_0^2}\right) \|\underline{v}\|^2 \geq 0.$$

Ainsi, la forme quadratique en  $t$  du membre de gauche ci-dessus est positive donc son discriminant est négatif ou nul, autrement dit :

$$a(\underline{v}, v^0)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{C_0^2}\right) \|\underline{v}\|^2 \|v^0\|^2.$$

On a donc obtenu l'inégalité voulue avec la constante  $\gamma$  telle que :

$$\gamma^2 = 1 - \frac{1}{C_0^2}.$$

□

*Remarque :* Dans la preuve précédente, la constante  $\gamma$  existe bien puisque  $C_0 \geq 1$  (qui provient du 1. de la Définition 3).

# Chapitre 4

## Estimateurs d'erreur

Construisons maintenant les estimateurs d'erreurs a posteriori. Nous ne traiterons que les second et troisième estimateurs de l'article.

### 4.1 Second estimateur

Intéressons nous donc au second estimateur défini localement comme suit :

**Définition 6.** On note  $\tilde{e}$  l'estimateur d'erreur appartenant à l'espace  $V_{T_h}^f$  et défini sur chaque triangle  $T$  comme la solution du problème local suivant :

$$(4.1) \quad a(\tilde{e}, v)_T = F_T(v - Iv) \quad \text{pour tout } v \text{ dans } V_{T_h}^f.$$

Si  $b \equiv 0$  sur  $T$ , l'estimateur  $\tilde{e}$  doit de plus vérifier :

$$\int_T \tilde{e} = 0,$$

pour assurer son unicité.

*Remarque :*

- En sommant sur tous les triangles du maillage on obtient la définition globale de  $\tilde{e}$  :

$$(4.2) \quad a(\tilde{e}, v) = F(v - Iv) \quad \text{pour tout } v \text{ dans } V_{T_h}^f.$$

- Puisque  $I(1) = 1$ , le problème (4.1) est bien posé (nous n'avons pas besoin de supposer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont compatibles).

Voyons un premier théorème nous donnant la fiabilité de l'estimateur  $\tilde{e}$  :

**Théorème 3.** *Soient  $C_0$  la constante de continuité de l'interpolant  $I$  de la Définition 3 et  $\beta$  la constante de la Conjecture 1. On a l'estimation suivante :*

$$(4.3) \quad (1 - \beta^2)^{1/2} \|e_H\| \leq \|\tilde{e}\| + C_0 \|e_{V_h}\|.$$

*Démonstration.* On a tout d'abord, par (4.2) avec  $v = e_{V_h^f}$  et par (3.12) avec  $Q = V_h^f$  :

$$\begin{aligned} a(\tilde{e}, e_{V_h^f}) &= F(e_{V_h^f} - I(e_{V_h^f})) \\ &= a(e_{V_h^f}, e_{V_h^f} - I(e_{V_h^f})). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (4.4) \quad \|e_{V_h^f}\|^2 &= a(e_{V_h^f}, e_{V_h^f}) \\ &= a(e_{V_h^f}, e_{V_h^f} - I(e_{V_h^f})) + a(e_{V_h^f}, I(e_{V_h^f})) \\ &= a(\tilde{e}, e_{V_h^f}) + a(e_{V_h^f}, I(e_{V_h^f})). \end{aligned}$$

De plus par (3.14) avec  $Q = V_h$  et  $v = I(e_{V_h^f}) \in V_h^g \subset V_h$  :

$$a(e_{V_h^f} - e_{V_h}, I(e_{V_h^f})) = 0,$$

d'où :

$$|||e_{V_h^f}|||^2 = a(\tilde{e}, e_{V_h^f}) + a(e_{V_h^f}, I(e_{V_h^f})) - a(e_{V_h^f} - e_{V_h}, I(e_{V_h^f})),$$

car le troisième terme est nul et ainsi :

$$|||e_{V_h^f}|||^2 = a(\tilde{e}, e_{V_h^f}) + a(e_{V_h}, I(e_{V_h^f})).$$

Et en majorant le terme de droite par Cauchy-Schwarz et par continuité de l'interpolant de la Définition 3 on obtient :

$$\begin{aligned} a(\tilde{e}, e_{V_h^f}) + a(e_{V_h}, I(e_{V_h^f})) &\leq |||\tilde{e}||| |||e_{V_h^f}||| + |||e_{V_h}||| |||I(e_{V_h^f})||| \\ &\leq |||\tilde{e}||| |||e_{V_h^f}||| + C_0 |||e_{V_h}||| |||e_{V_h^f}|||. \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$|||e_{V_h^f}|||^2 \leq |||\tilde{e}||| |||e_{V_h^f}||| + C_0 |||e_{V_h}||| |||e_{V_h^f}|||.$$

Ainsi, en simplifiant par  $|||e_{V_h^f}|||$  et en utilisant le Lemme 3 on obtient la majoration suivante :

$$(1 - \beta^2)^{1/2} |||e_H||| \leq |||e_{V_h^f}||| \leq |||\tilde{e}||| + C_0 |||e_{V_h}|||.$$

□

Le théorème suivant nous donne l'efficacité de l'estimateur  $\tilde{e}$ .

**Théorème 4.** *Soit  $C_0$  la constante de continuité de l'interpolant  $I$  donnée dans la Définition 3. Alors :*

$$|||\tilde{e}||| \leq (1 + C_{\tilde{e}}) |||e_H||| + C_0 |||e_{V_h}|||,$$

$$\text{où } C_{\tilde{e}} = (C_0 + C_3 C_5 (1 + C_0)) \inf_{\chi \in V_h^f} \frac{|||\tilde{e} - \chi|||}{|||\tilde{e}|||}.$$

*Démonstration.* Soit  $v$  une fonction de  $V_h^f$ , alors par (4.2) et comme  $e_H$  vérifie (3.19) on a :

$$\begin{aligned}
(4.5) \quad a(\tilde{e}, v) &= F(v - I(v)) \\
&= F(v - I(v)) + \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v - I(v) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \\
&\quad - \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v - I(v) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \\
&= a(e_H, v - I(v)) + \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket v - I(v) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}
\end{aligned}$$

Introduisons tout d'abord  $\phi$  la projection elliptique de  $\tilde{e}$  sur  $V_h^f$  autrement dit :

$$\|\tilde{e} - \phi\| = \inf_{v \in V_h^f} \|\tilde{e} - v\|,$$

On a alors :

$$(4.6) \quad \|\phi\| \leq \|\tilde{e}\|,$$

et d'autre part :

$$\llbracket \phi - I(\phi) \rrbracket = 0,$$

car la fonction  $\phi - I(\phi)$  est continue.

Prenons maintenant  $v = \tilde{e}$  dans (4.5) :

$$\begin{aligned}
a(\tilde{e}, \tilde{e}) &= a(e_H, \tilde{e} - I(\tilde{e})) + \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket \tilde{e} - I(\tilde{e}) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \\
&= a(e_H, \tilde{e}) - a(e_H, I(\tilde{e})) + a(e_H, I(\phi)) - a(e_H, I(\phi)) \\
&\quad + \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket \tilde{e} - I(\tilde{e}) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \\
&= a(e_H, \tilde{e}) - a(e_H, I(\tilde{e} - \phi)) - a(e_H, I(\phi)) \\
&\quad + \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket \tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I}
\end{aligned}$$

Bornons maintenant les quatre termes de droite :

- Par Cauchy-Schwarz,  $|a(e_H, \tilde{e})| \leq \|e_H\| \|\tilde{e}\|$ ,
- de même,  $|a(e_H, I(\tilde{e} - \phi))| \leq C_0 \|e_H\| \|\tilde{e} - \phi\|$ .
- Pour le troisième terme, comme  $I(\phi)$  est dans  $V_h^g \subset V_h$ , par (4.6), par (3.13) et par la Définition 3 :

$$\begin{aligned}
(4.7) \quad |a(e_H, I(\phi))| &= |a(e_{V_h}, I(\phi))| \leq C_0 \|e_{V_h}\| \|\phi\| \\
&\leq C_0 \|e_{V_h}\| \|\tilde{e}\|.
\end{aligned}$$

- Concernant le quatrième terme : comme  $\tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi)$  s'annule en les points d'interpolation alors par le Théorème 2, cette fonction vérifie l'hypothèse du Lemme 3. Ainsi par Cauchy-Schwarz et par les Lemmes 2 et 3 :

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket \tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \right| &\leq \left| \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\} \right|_{\mathcal{E}_h^I} \|\llbracket \tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi) \rrbracket\|_{\mathcal{E}_h^I} \\
&\leq C_3 h^{-1/2} \|e_H\| C_5 h^{1/2} \|\tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi)\|.
\end{aligned}$$

Puis par continuité de l'interpolant :

$$C_3 C_5 \|e_H\| \| \|\tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi)\| \| \leq C_3 C_5 \|e_H\| (1 + C_0) \| \|\tilde{e} - \phi\| \|.$$

D'où la majoration du quatrième terme :

$$\left| \left\langle \left\{ a \frac{\partial e_H}{\partial n} \right\}, \llbracket \tilde{e} - \phi - I(\tilde{e} - \phi) \rrbracket \right\rangle_{\mathcal{E}_h^I} \right| \leq C_3 C_5 \|e_H\| (1 + C_0) \| \|\tilde{e} - \phi\| \|.$$

Finalement en recollant les quatre majorations on obtient :

$$\begin{aligned} |a(\tilde{e}, \tilde{e})| &\leq \|e_H\| \| \|\tilde{e}\| \| + C_0 \|e_H\| \| \|\tilde{e} - \phi\| \| + C_0 \|e_{V_h}\| \| \|\tilde{e}\| \| \\ &\quad + C_3 C_5 (1 + C_0) \|e_H\| \| \|\tilde{e} - \phi\| \|. \end{aligned}$$

En divisant par  $\| \|\tilde{e}\| \|$  :

$$\begin{aligned} \| \|\tilde{e}\| \| &\leq \|e_H\| + C_0 \|e_H\| \frac{\| \|\tilde{e} - \phi\| \|}{\| \|\tilde{e}\| \|} + C_0 \|e_{V_h}\| \\ &\quad + C_3 C_5 (1 + C_0) \|e_H\| \frac{\| \|\tilde{e} - \phi\| \|}{\| \|\tilde{e}\| \|} \end{aligned}$$

On a alors le résultat par définition de  $\phi$ .

□

*Remarque :*

- On remarque que le coefficient  $C_{\tilde{e}}$  permet de mesurer la continuité de l'estimateur  $\tilde{e}$ . En effet, celui-ci représente la distance minimale (normalisée) séparant  $\tilde{e}$  de l'espace de fonctions continues  $V_h^f$  donc, en un sens, plus cette distance est faible, plus  $\tilde{e}$  est proche d'une fonction continue. De plus, si  $C_{\tilde{e}} = 0$  cela signifie que  $\tilde{e}$  appartient à  $V_h^f$  et donc que  $\tilde{e}$  est continue.

- Si nous récapitulons les résultats des Théorèmes 3 et 4, nous obtenons la double inégalité suivante :

$$(4.8) \quad (1 - \beta^2)^{1/2} \|e_H\| \leq \|\tilde{e}\| + C_0 \|e_{V_h}\| \leq (1 + C_{\tilde{e}}) \|e_H\| + 2C_0 \|e_{V_h}\|.$$

Les termes  $C_0 \|e_{V_h}\|$  présents dans cette double inégalité nous empêchent de montrer l'exactitude asymptotique de l'estimateur  $\tilde{e}$ .

Le théorème suivant, en ajoutant une hypothèse résout le problème de l'exactitude asymptotique de l'estimateur  $\tilde{e}$  :

**Théorème 5.** *Supposons que (3.11) soit vérifiée. Alors :*

$$(1 - \beta^2)^{1/2} \|e_H\| \leq \|\tilde{e}\| \leq (1 + C_{\tilde{e}}) \|e_H\|.$$

*Démonstration.* Pour prouver ce théorème il suffit de reprendre les preuves des Théorèmes 3 et 4 mais sous de nouvelles hypothèses. Ainsi, si on réécrit l'égalité (4.4) :

$$\|e_{V_h^f}\|^2 = a(\tilde{e}, e_{V_h^f}) + a(e_{V_h^f}, I(e_{V_h^f})),$$

comme on a supposé (3.11) et que  $I(e_{V_h^f})$  appartient à  $V_h^g$ , on a par (3.14) :

$$\begin{aligned} a(e_{V_h}, I(e_{V_h^f})) &= a(e_{V_h^f}, I(e_{V_h^f})) \\ &= a(e_{V_h}, I(e_{V_h^f})) - a(e_{V_h^f} - e_{V_h}, I(e_{V_h^f})) \\ &= a(e_{V_h}, I(e_{V_h^f})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, dans la preuve du Théorème 4 le terme  $a(e_H, I(\phi))$  de (4.7) est également nul. D'où finalement, on obtient les mêmes inégalités que dans les deux résultats précédents : minoration du Théorème 3 et majoration du Théorème 4 avec cependant les termes  $C_0 \|e_{V_h}\|$  qui ont disparu.  $\square$

*Remarque :* Ce théorème permet de montrer l'exactitude asymptotique de  $\tilde{e}$  sous l'hypothèse (3.11) qui n'implique ni que les fonctions  $u_{V_h}$  et  $U$  soient égales, ni que  $U$  tende vers  $u_{V_h}$  lorsque le pas diminue mais simplement que l'espace  $V_h^g$  ne puisse distinguer  $U$  de  $u_{V_h}$ . Ainsi, l'espace  $V_h^g$  est à choisir consciencieusement si l'on veut estimer l'erreur réelle de façon précise. Par exemple, prendre  $V_h^g = V_h$  implique qu'aucune approximation ne soit faite lors du calcul de la solution EF  $u_H$ .

## 4.2 Troisième estimateur

Le second estimateur d'erreur est défini sur chaque triangle  $T$  comme la solution de (4.1) qui est un système de taille  $\dim(V_h^f(T))$ . De plus, pour  $b \equiv 0$  sur  $T$  le problème définissant  $\tilde{e}$  n'est bien posé que lorsque l'on fait une hypothèse supplémentaire sur  $\tilde{e}$ . En vue d'améliorer ces deux points, le troisième estimateur sera défini comme la solution d'un problème automatiquement bien posé et que l'on pourra approximer par la résolution d'un système linéaire de plus petite taille.

**Définition 7.** *Soit  $T$  un triangle du maillage. L'estimateur d'erreur  $\check{e}$  appartenant à l'espace  $V_h^0(T)$  est défini sur  $T$  comme la solution du problème local :*

$$(4.9) \quad a(\check{e}, v)_T = F_T(v), \text{ pour tout } v \in V_h^0(T).$$

*Remarque :*

- Comme la fonction constante égale à 1 n'appartient pas à l'espace  $V_h^0(T)$ , le système linéaire (4.9) est défini-positif.

- On a,  $\dim(V_h^0(T)) = \dim(V_h^f(T)) - \dim(V_h^g(T))$  ainsi le système (4.9) est bien de taille inférieure à celle du système (4.1).
- De plus, par (4.1) on a pour toute fonction  $v$  de  $V_h^0(T)$ , comme  $I(v) = 0$  :

$$(4.10) \quad a(\check{e}, v)_T = F_T(v - I(v)) = a(\tilde{e}, v)_T.$$

Cette équation montre que l'estimateur  $\check{e}$  est en fait la projection elliptique de  $\tilde{e}$  sur l'espace  $V_h^0(T)$ .

Nous pouvons maintenant comparer les normes de l'énergie du second et troisième estimateur d'erreur grâce au théorème suivant. Ce théorème nous permettra d'obtenir la fiabilité et l'efficacité de  $\check{e}$  à partir de celles de  $\tilde{e}$ .

**Théorème 6.** *Soit  $\gamma$  la constante du Lemme 5. On encadre alors la norme de l'énergie de  $\check{e}$  ainsi :*

$$(1 - \gamma)^{1/2} |||\check{e}||| \leq |||\tilde{e}||| \leq |||\tilde{e}|||.$$

*Démonstration.* L'inégalité de droite se prouve en utilisant (4.10) avec  $v = \check{e}$  :

$$|||\check{e}|||^2 = a(\tilde{e}, \check{e}) \leq |||\tilde{e}||| |||\check{e}|||.$$

Montrons maintenant l'inégalité de gauche. Pour cela, décomposons le second estimateur d'erreur en :

$$\tilde{e} = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2$$

avec  $\tilde{e}_1$  dans  $V_{T_h}^g$  et  $\tilde{e}_2$  dans  $V_{T_h}^0$ .

Tout d'abord on constate que comme  $\tilde{e}_1 = I(\tilde{e}_1)$  on a par (4.10) :

$$(4.11) \quad a(\tilde{e}, \tilde{e}_1) = F(\tilde{e}_1 - I(\tilde{e}_1)) = F(0) = 0.$$

Ensuite, en utilisant (4.11), la symétrie de  $a$  et finalement le Lemme 5 on obtient :

$$\begin{aligned}
|||\tilde{e}|||^2 &= a(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) + 2a(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + a(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \\
&= a(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2) + a(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + a(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \\
&= a(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) + a(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) \\
&\geq |||\tilde{e}_2|||^2 \left(1 - \gamma \frac{|||\tilde{e}_1|||}{|||\tilde{e}_2|||}\right).
\end{aligned}$$

Or, par (4.11) puis par Cauchy-Schwarz on a :

$$\frac{|||\tilde{e}_1|||}{|||\tilde{e}_2|||} = -\frac{a(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)}{|||\tilde{e}_1||| |||\tilde{e}_2|||} \leq 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
(4.12) \quad |||\tilde{e}|||^2 &\geq |||\tilde{e}_2|||^2 \left(1 - \gamma \frac{|||\tilde{e}_1|||}{|||\tilde{e}_2|||}\right) \\
&\geq (1 - \gamma) |||\tilde{e}_2|||^2.
\end{aligned}$$

Finalement, par (4.11) et par (4.10) avec  $v = \tilde{e}_2$ ,

$$|||\tilde{e}|||^2 = a(\tilde{e}, \tilde{e}_1) + a(\tilde{e}, \tilde{e}_2) = a(\tilde{e}, \tilde{e}_2) \leq |||\tilde{e}||| |||\tilde{e}_2|||.$$

Donc par (4.12) :

$$|||\tilde{e}|||^2 \leq |||\tilde{e}||| |||\tilde{e}_2||| \leq |||\tilde{e}||| (1 - \gamma)^{-1/2} |||\tilde{e}|||.$$

Ainsi on obtient le théorème en divisant par  $(1 - \gamma)^{-1/2} |||\tilde{e}|||$ .

□

Voyons finalement un théorème concernant l'exactitude asymptotique de l'estimateur  $\check{e}$ .

**Théorème 7.** *Considérons  $\beta$  la constante de la Conjecture 1,  $\gamma$  la constante du Lemme 5 ainsi que  $C_0$  la constante de continuité de l'interpolant  $I$  donnée dans la Définition 3. On a alors l'inégalité :*

$$(4.13) \quad (1 - \beta^2)^{1/2} \|e_H\| \leq (1 - \gamma)^{-1/2} \|\check{e}\| + C_0 \|e_{V_h}\|.$$

Ainsi que :

$$(4.14) \quad \|\check{e}\| \leq (1 + C_{\check{e}}) \|e_H\| + C_0 \|e_{V_h}\|.$$

De plus, si (3.11) est vérifiée alors :

$$(4.15) \quad ((1 - \beta^2)(1 - \gamma))^{1/2} \|e_H\| \leq \|\check{e}\| \leq (1 + C_{\check{e}}) \|e_H\|.$$

*Démonstration.*

- Commençons par l'inégalité (4.13). Par les Théorèmes 3 et 6 on a :

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2)^{1/2} \|e_H\| &\leq \|\tilde{e}\| + C_0 \|e_{V_h}\| \\ &\leq (1 - \gamma)^{-1/2} \|\check{e}\| + C_0 \|e_{V_h}\|. \end{aligned}$$

- Pour (4.14), les Théorèmes 4 et 6 nous donnent :

$$\begin{aligned} \|\check{e}\| &\leq \|\tilde{e}\| \\ &\leq (1 + C_{\check{e}}) \|e_H\| + C_0 \|e_{V_h}\|. \end{aligned}$$

- Pour la double inégalité (4.15) on a d'une part, par les Théorèmes 5 et 6 :

$$\|\check{e}\| \leq \|\tilde{e}\| \leq (1 + C_{\check{e}}) \|e_H\|.$$

D'autre part, par les Théorèmes 5 et 6 :

$$(1 - \beta^2)^{1/2} \|e_H\| \leq \|\tilde{e}\| \leq (1 - \gamma)^{-1/2} \|\check{e}\|.$$

D'où la double inégalité voulue :

$$((1 - \gamma)(1 - \beta^2))^{1/2} \|e_H\| \leq \|\check{e}\| \leq (1 + C_{\check{e}}) \|e_H\|.$$

□

*Remarque :* Cette fois-ci et contrairement au second estimateur, l'hypothèse (3.11) ne suffit pas à montrer l'exactitude asymptotique de  $\check{e}$ . En effet, dans la double inégalité (4.15) la constante  $\gamma$  est indépendante du pas du maillage  $h$  et n'a donc aucune raison de tendre vers 0 avec  $h$ .

# Chapitre 5

## Résultats numériques

### 5.1 Cadre et problème considéré

Dans ce dernier chapitre nous allons comparer numériquement les estimateurs  $\tilde{e}$  et  $\check{e}$  ainsi que l'erreur réelle  $e_H$ . Pour cela nous allons considérer un problème plus simple que le problème (1) en prenant  $a \equiv 1$  et  $b \equiv 0$ , c'est à dire :

**Problème 3.** *Trouver une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

De formulation faible :

**Problème 4** (Formulation faible). *Trouver une fonction  $u$  dans  $H$  telle que pour tout  $v$  dans  $H$  :*

$$(5.2) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v$$

Fixons  $\mathcal{T}_h$  un maillage sur  $\Omega$  de pas  $h$ . Afin de comparer chaque estimateur avec l'erreur réelle  $e_H$  nous utiliserons l'indice d'efficacité défini comme suit :

**Définition 8** (Indice d'efficacité). Soit  $\bar{e}$  l'un des estimateurs  $\tilde{e}$  ou  $\check{e}$ . Notons  $\text{eff}(\bar{e})$  l'indice d'efficacité défini par :

$$\text{eff}(\bar{e}) = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e_H\|}.$$

Nous mesurerons l'erreur relative entre les estimateurs et  $e_H$  en utilisant la fonction  $\rho$  définie par :

$$\rho(\bar{e}) = \text{eff}(\bar{e}) - 1.$$

Evidemment la situation la plus souhaitable est d'avoir  $\rho(\bar{e})$  convergeant vers zéro ou proche de zéro. Les valeurs positives de  $\rho$  signifient que nous avons sur-estimé l'erreur réelle, ce qui est acceptable tant que  $\rho$  n'est pas beaucoup plus grand que 1. Les valeurs négatives de  $\rho$  signifient que nous sous-estimons la véritable erreur.

Sur un maillage suffisamment raffiné, nous devons avoir  $\rho(\tilde{e})$  positif ou nul et  $\rho(\check{e}) \geq (1 - \gamma)^{1/2} - 1$ . En effet, les Théorèmes 3 et (4.13) donnent :

$$(1 - \beta^2)^{1/2} \leq \text{eff}(\tilde{e}) + C_0 \frac{\|e_{V_h}\|}{\|e_H\|},$$

$$(1 - \beta^2)^{1/2}(1 - \gamma)^{1/2} \leq \text{eff}(\check{e}) + (1 - \gamma)^{1/2} C_0 \frac{\|e_{V_h}\|}{\|e_H\|}.$$

Si le maillage est suffisamment fin, nous pouvons considérer  $\|e_{V_h}\|$  et  $\beta$  comme négligeables et ainsi :

$$1 \leq \text{eff}(\tilde{e}),$$

$$(1 - \gamma)^{1/2} \leq \text{eff}(\check{e}),$$

autrement dit :

$$0 \leq \rho(\tilde{e}),$$

$$(1 - \gamma)^{1/2} - 1 \leq \rho(\check{e}).$$

## 5.2 Cas d'une gaussienne sur $]0, 1[{}^2$

Regardons le cas particulier où le domaine  $\Omega$  est le carré  $]0, 1[{}^2$  et où les fonctions  $f$  et  $g$  sont données par :

$$f(x, y) = \left(400 - (200(x - 0.75))^2 - (200(y - 0.75))^2\right) e^{-100((x-0.75)^2+(y-0.75)^2)},$$

et,

$$g(x, y) = (-200(x - 0.75)n_1 - 200(y - 0.75)n_2) e^{-100((x-0.75)^2+(y-0.75)^2)}.$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les coordonnées de la normale  $n$ .

La solution du Problème (5.1) dans ce cas est la fonction :

$$u_H(x, y) = e^{-100((x-0.75)^2+(y-0.75)^2)}.$$

Dans l'Annexe A nous présentons des algorithmes implémentés en Freefem++ permettant de calculer l'approximation  $U$  ainsi que les deux estimateurs  $\tilde{e}$  et  $\check{e}$  sur le domaine  $]0, 1[{}^2$  muni d'un maillage uniforme cartésien et dans le cas où  $V_h^g = V_h$  est l'espace éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et où  $V_h^f$  est l'espace éléments finis  $\mathbb{P}_2$  discontinu.

### 5.2.1 Maillage uniforme cartésien

Etudions l'évolution de l'erreur réelle  $|||e_H|||$ , des normes des estimateurs  $|||\tilde{e}|||$  et  $|||\check{e}|||$  ainsi que des erreurs relatives  $\rho(\tilde{e})$  et  $\rho(\check{e})$  lorsque  $]0, 1[{}^2$  est muni d'un maillage uniforme cartésien dont on diminue progressivement le pas.

It.	Pas	$   e_H   $	$   \tilde{e}   $	$\rho(\tilde{e})$	$   \check{e}   $	$\rho(\check{e})$
1	0,25	1,27601	1,59296	0,248384	1,39716	0,0949396
2	0,125	0,951531	1,44206	0,515514	1,14536	0,203708
3	0,0625	0,670262	1,01259	0,510741	0,747422	0,115118
4	0,03125	0,351578	0,529459	0,505949	0,362444	0,0309042
5	0,015625	0,178008	0,26782	0,504538	0,179066	0,00594517
6	0,0078125	0,0892871	0,134305	0,504188	0,0892424	-0,000500686
7	0,00390625	0,0446791	0,0672017	0,504097	0,044584	-0,00213029
8	0,00195312	0,022344	0,033607	0,504071	0,0222872	-0,00254256

L'erreur relative  $\rho(\tilde{e})$  semble converger vers une valeur proche de 0,5, autrement dit l'estimateur ne semble clairement pas asymptotiquement exact. Ceci était prévisible puisque dans notre cas nous n'avons pas  $u_{V_h} = U$  du fait entre autres que l'on a dû pénaliser le problème lors de l'implémentation mais également que les intégrales des fonctions  $f$  et  $g$  ont dû être approchées par des méthodes de quadrature.

Ainsi, nous ne sommes pas dans le cadre de l'Hypothèse 3.11 et l'exactitude asymptotique des estimateurs  $\tilde{e}$  et  $\check{e}$  va dépendre de l'erreur d'approximation commise entre  $u_{V_h}$  et  $U$ .

Pour les mêmes raisons énoncées ci-dessus, l'estimateur  $\check{e}$  n'est pas non plus asymptotiquement exact dans ce cas. On remarque cependant que l'erreur relative pour l'estimateur  $\check{e}$  est bien meilleure que celle de l'estimateur  $\tilde{e}$ . Ce qui est particulièrement appréciable puisque comme nous l'avons précisé plus tôt, le calcul de l'estimateur  $\check{e}$  nécessite de résoudre un système linéaire de taille moins importante que pour  $\tilde{e}$ .

## 5.2.2 Maillage quelconque

Regardons l'évolution des erreurs relatives pour le même problème mais cette fois-ci en se donnant un maillage quelconque sur  $]0; 1]^2$ .

It.	Pas	$\ e_H\ $	$\ \tilde{e}\ $	$\rho(\tilde{e})$	$\ \check{e}\ $	$\rho(\check{e})$
1	0,372678	1,6556	2,1915	0,323694	1,82887	0,104661
2	0,206473	0,974369	1,3024	0,336662	1,1202	0,149663
3	0,102545	0,535947	0,691754	0,290714	0,582867	0,0875465
4	0,0519297	0,295794	0,387663	0,310587	0,315605	0,0669772
5	0,0253683	0,152619	0,200803	0,315712	0,161908	0,0608613

On constate encore une différence entre les mesures relatives de  $\tilde{e}$  et de  $\check{e}$  cette dernière restant la meilleure. On peut également constater que l'erreur relative de  $\tilde{e}$  est meilleure dans le cas d'un maillage quelconque que dans le cas du maillage uniforme cartésien.

### 5.2.3 Quelques figures pour le maillage uniforme cartésien

Voici quelques graphiques pour la fonction  $U$ , les estimateurs  $\tilde{\epsilon}$  et  $\check{\epsilon}$  ainsi que leurs normes de l'énergie sur chaque triangle du maillage, dans le cas d'un maillage uniforme cartésien possédant 800 triangles. Le choix d'une gaussienne pour la solution  $u_H$  va nous permettre de vérifier que les estimateurs localisent correctement les variations de la solution, concentrées autour du point  $M = (0, 75; 0, 75)$ .

Tout d'abord, le graphe de la fonction  $U$  :

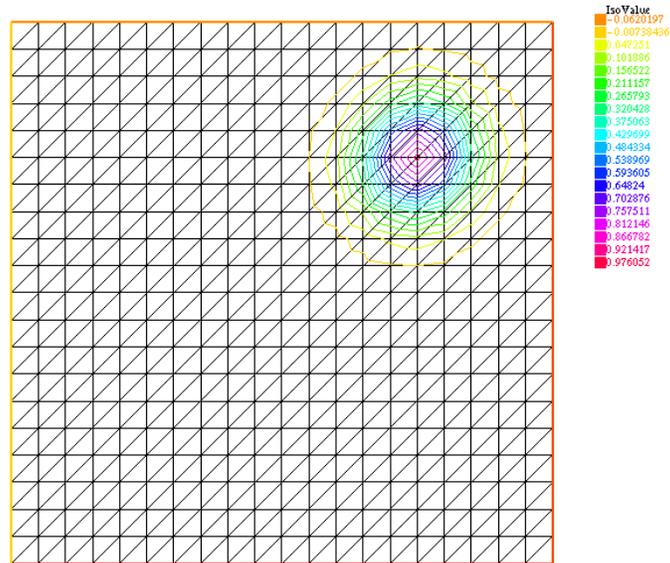


FIGURE 5.1 – La solution approchée  $U$  (maillage et lignes de niveaux vues du dessus).

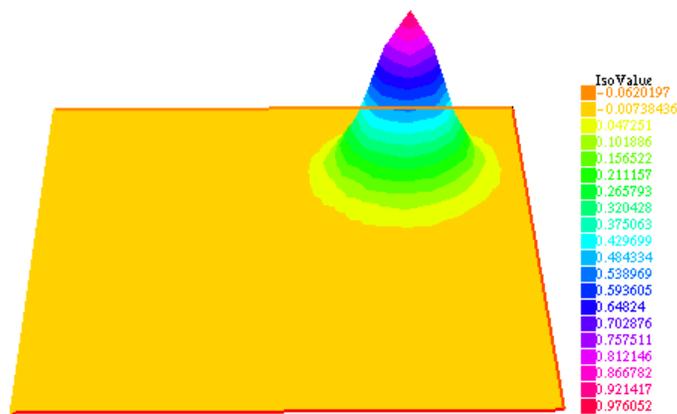


FIGURE 5.2 – La solution approchée  $U$ .

Le graphe de l'estimateur  $\tilde{\epsilon}$ . On constate que ses variations sont bien concentrées autour du point  $M$ .

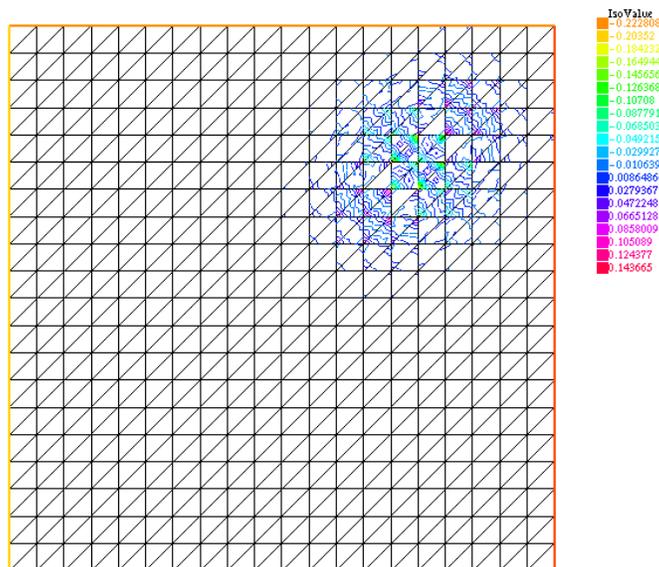


FIGURE 5.3 – L'estimateur d'erreur  $\tilde{\epsilon}$  (maillage et lignes de niveaux vues du dessus).

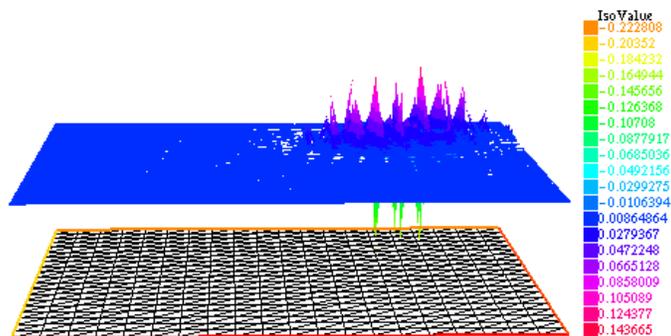


FIGURE 5.4 – L'estimateur d'erreur  $\tilde{\epsilon}$ .

La norme de l'énergie de  $\tilde{e}$  détaillée triangle par triangle. Ce calcul local de la norme de l'énergie de l'estimateur permet de repérer les zones où l'on commet le plus d'erreurs et ainsi de repérer les zones du maillage que l'on pourrait raffiner en vue d'une seconde itération du calcul de  $U$ .

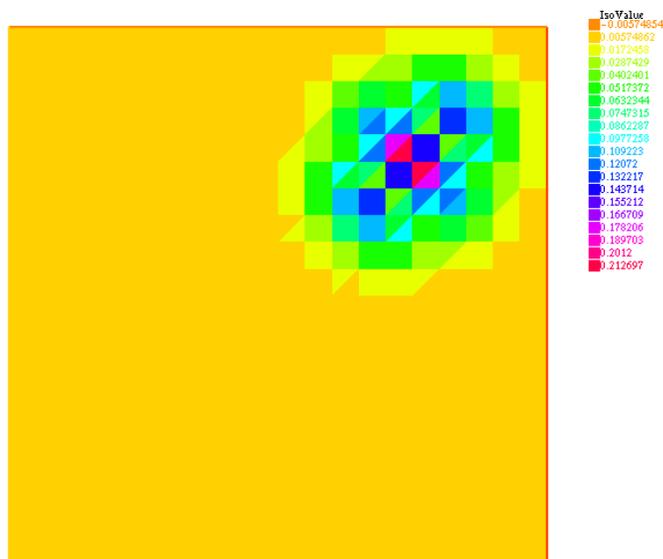


FIGURE 5.5 – Norme de l'énergie de  $\tilde{e}$  (vue du dessus).

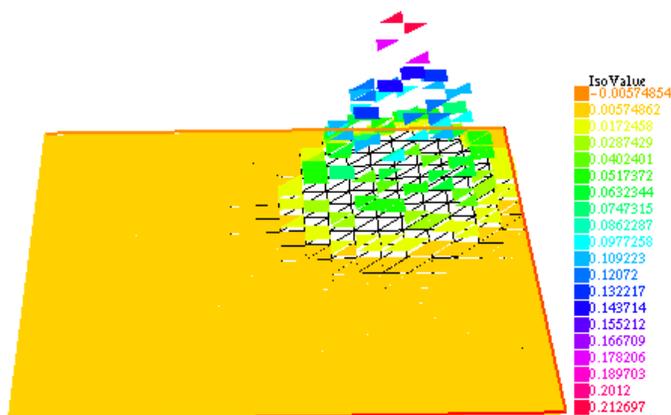


FIGURE 5.6 – Norme de l'énergie de  $\tilde{e}$ .

De même, l'estimateur  $\check{\epsilon}$  a bien ses variations concentrées autour du point  $M$ .

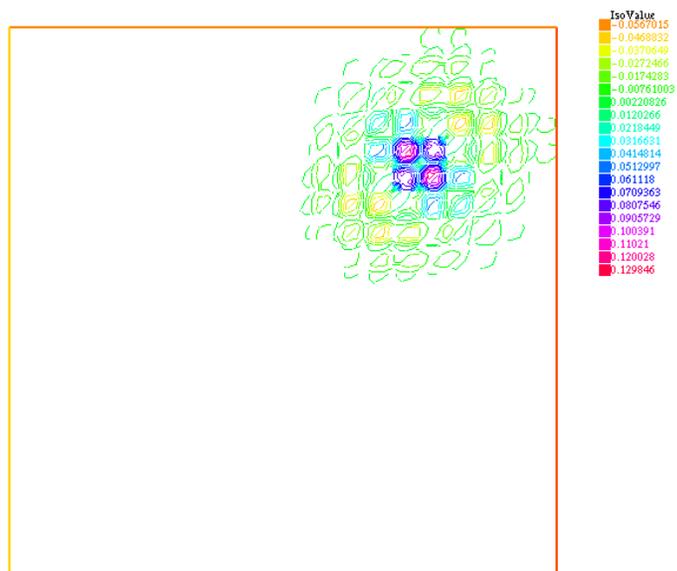


FIGURE 5.7 – Estimateur  $\check{\epsilon}$  (lignes de niveaux vues du dessus).

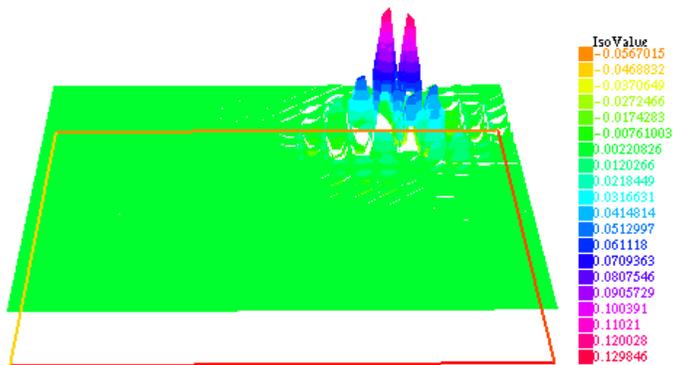


FIGURE 5.8 – L'estimateur d'erreur  $\check{\epsilon}$ .

La norme de l'énergie de  $\tilde{\epsilon}$  indique également la zone comportant le plus d'erreurs d'approximation.

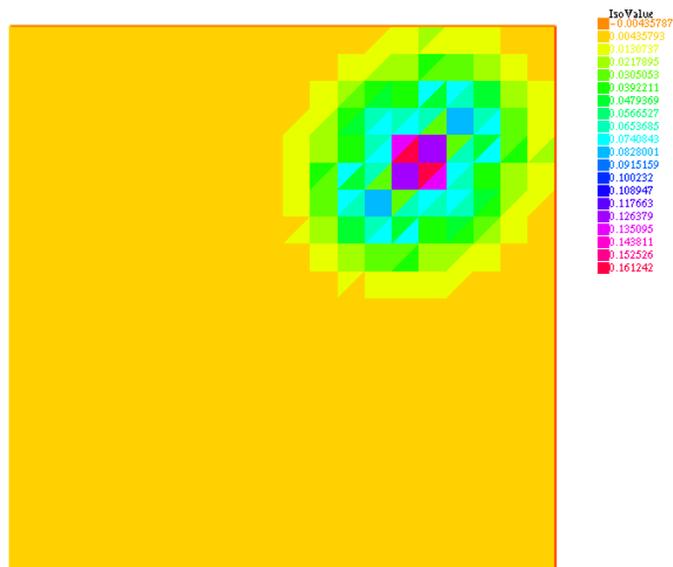


FIGURE 5.9 – Norme de l'énergie de  $\tilde{\epsilon}$  (vue du dessus).

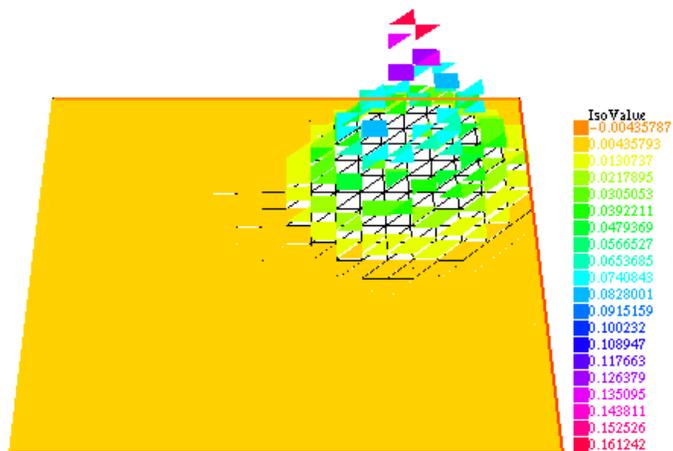


FIGURE 5.10 – Norme de l'énergie de  $\tilde{\epsilon}$ .

# Annexe A

## Algorithmes

### Fonction $U$

---

**Algorithme 1 :** Calcul de l'approximation éléments finis  $U$

---

```
Mesh Th=square(20,20);
fespace Vh(Th,P1);
real eps=1E-10;
Vh U,vh, fh;

macro dn(h) (N.x*dx(h)+N.y*dy(h))//;
```

*Définition des fonctions  $f$  et  $g$*

```
real [int] m=[0.75,0.75];
real sig=0.01;
func u=exp(-((x-m[0])2+(y-m[1])2)/sig);
func a1=((2/sig)*(x-m[0]));
func a2=((2/sig)*(y-m[1]));
func f=u*(4/sig-a12-a22);
func g=(N.x*(-a1)+N.y*(-a2))*u;
```

*Définition de la forme bilinéaire  $a$  et de la forme linéaire  $L$*

```
varf a(U,vh) = int2d(Th)( dx(U)*dx(vh) + dy(U)*dy(vh) ) +
int2d(Th)(eps*U*vh);
```

```
varf L(UNUSED,vh) = int2d(Th)( f*vh ) + int1d(Th)( g*vh );
```

*Définition et résolution du système linéaire*

```
matrix A=a(Vh,Vh, solver=sparsecv);
fh[]=L(0,Vh);
U[]=A-1*fh[];
```

---

## Estimateur $\tilde{e}$

---

### Algorithme 2 : Calcul du second estimateur d'erreur $\tilde{e}$

---

```
Mesh Th=square(20,20);
fespace Vh(Th,P1);
fespace Vhf(Th,P2dc);
real eps=1E-10;
Vh U,vh, fh;
Vhf eh, fhf, wh;

macro dn(h) (N.x*dx(h)+N.y*dy(h))//;

Définition des fonctions f et g
real [int] m=[0.75,0.75];
real sig=0.01;
func u=exp(-((x-m[0])2+(y-m[1])2)/sig);
func a1=((2/sig)*(x-m[0]));
func a2=((2/sig)*(y-m[1]));
func f=u*(4/sig-a12-a22);
func g=(N.x*(-a1)+N.y*(-a2))*u;

Calcul de la solution U;

Définition de la forme bilinéaire a et de la forme linéaire F
varf a(U,vh) = int2d(Th)( dx(U)*dx(vh) + dy(U)*dy(vh) ) +
int2d(Th)(eps*U*vh);

varf F(UNUSED,w) = int2d(Th)(f*w) - int1d(Th)((g- dn(U))*w) +
intalldges(Th)(0.5*(nTonEdge-1)*jump(dn(U))*average(w));

Définition et résolution du système linéaire
matrix B=a(Vhf,Vhf, solver=sparsesolver);
fhf []=F(0,Vhf);

Calcul de fhf-I(fhf)
for(int k=0; k<Th.nt; k++)
for(int j=0; j<3; j++)
{
fhf [] [Vhf(k,j)]=-0.5*fhf [] [Vhf(k,3+(j+1) mod
3)]-0.5*fhf [] [Vhf(k,3+(j+2) mod 3)]
}
eh []=B-1*fhf [];
```

---

## Estimateur $\check{e}$

---

### Algorithme 3 : Calcul du second estimateur d'erreur $\check{e}$

---

```
Mesh Th=square(20,20);
fespace Vh(Th,P1);
fespace Vhf(Th,P2dc);
real eps=1E-10;
Vh U,vh, fh;
Vhf eh, fhf, wh;
macro dn(h) (N.x*dx(h)+N.y*dy(h))//;
```

*Définition des fonctions f et g*

```
real [int] m=[0.75,0.75];
real sig=0.01;
func u = exp(-((x - m[0])2 + (y - m[1])2)/sig);
func a1=((2/sig)*(x-m[0]));
func a2=((2/sig)*(y-m[1]));
func f=u*(4/sig-a12-a22);
func g=(N.x*(-a1)+N.y*(-a2))*u;
Calcul de la solution U;
```

*Définition de la forme bilinéaire a et de la forme linéaire F*

```
varf a(U,vh) = int2d(Th)( dx(U)*dx(vh) + dy(U)*dy(vh) ) + int2d(Th)(eps*U*vh);
varf F(unused,w) = int2d(Th)(f*w) - int1d(Th)((g - dn(U))*w) +
intalldges(Th)(0.5*(nTonEdge-1)*jump(dn(U))*average(w));
```

```
matrix B=a(Vhf,Vhf);
fhf []=F(0,Vhf);
```

*Projection du vecteur fhf sur l'espace EF  $V_{Th}^0$*

```
int N dof2=Vhf.ndof/2, num=0;
int[int] I(N dof2);
real[int] fh3(N dof2), eh3(N dof2);
```

```
for(int k=0; k<Th.nt; k++)
for(int j=3; j<6; j++)
{
I[num]=Vhf(k,j);
fh3[num]=fhf [] [I[num]];
num++;
}
```

*Résolution du système linéaire pour le projeté fh3*

```
matrix C=B(I,I);
set (C,solver=sparsesolver);
eh3=C-1*fh3;
```

```
eh=0;
for(int k=0;k<N dof2;k++) eh [] [I[k]]=eh3[k];
```

---

# Annexe B

## Quelques précisions sur les algorithmes

Nous détaillerons ici les points clés concernant les algorithmes 2 et 3.

### Rappels sur la discrétisation éléments finis

Cette section sert de préliminaire aux deux sections suivantes décrivant les algorithmes pour les estimateurs  $\tilde{\epsilon}$  et  $\check{\epsilon}$ . On va rappeler ici la méthode permettant de passer de la formulation variationnelle d'un problème à un système linéaire.

Considérons pour cela l'exemple du Problème 4 sur  $\Omega$  qui est le carré  $]0; 1[^2$  muni d'un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_h$ . Considérons également que l'espace  $V_h$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_1$  associé au maillage  $\mathcal{T}_h$ . On approxime alors la solution du Problème 4 par la solution du problème discrétisé suivant :

**Problème 5.** *Trouver  $u_h$  dans  $V_h$  telle que pour tout  $v_h$  dans  $V_h$  :*

$$a(u_h, v_h) = \Psi(v_h),$$

$$\text{avec } a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \text{ et } \Psi(v_h) = \int_{\Omega} f v_h.$$

L'espace  $V_h$  est un espace vectoriel de dimension finie  $N$ , munissons-le de la base des fonctions chapeaux  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  définies pour tous  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $N$  par :

$$\varphi_j(\chi_i) = \delta_{i,j},$$

où  $\{\chi_i\}_{i=1}^N$  est l'ensemble des noeuds des degrés de liberté de l'espace  $V_h$  et où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker valant 0 si  $i \neq j$  et 1 sinon.

Il est alors possible d'associer à chaque fonction de  $V_h$  le vecteur de ses coordonnées dans la base des fonctions chapeaux. Par exemple, écrivons  $u_h$  dans la base des fonctions chapeaux :

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i,$$

et notons  $\vec{u}$  le vecteur des coordonnées de  $u_h$  de telle sorte que :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}.$$

Ainsi, déterminer  $u_h$  revient à déterminer ses coordonnées  $u_i$  dans la base des fonctions chapeaux.

De plus, comme  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  est une base de  $V_h$  il est possible de ramener le Problème discrétisé 5 au problème suivant :

**Problème 6.** *Trouver  $u_h$  dans  $V_h$  telle que pour tout  $j$  entre 1 et  $N$  :*

$$a(u_h, \varphi_j) = \Psi(\varphi_j).$$

Si l'on réécrit cette égalité en décomposant  $u_h$  dans la base des fonctions chapeaux on obtient alors :

$$(B.1) \quad \sum_{i=1}^N u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \Psi(\varphi_j),$$

pour tout  $j$  entre 1 et  $N$ .

Notons alors  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$  la matrice, dite matrice de rigidité, définie comme suit :

$$B = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i,j \leq N},$$

ainsi que  $\vec{f}$  le vecteur défini par :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \Psi(\varphi_1) \\ \vdots \\ \Psi(\varphi_N) \end{pmatrix}.$$

On peut ainsi reformuler (B.1) en un système linéaire :

$$(B.2) \quad B\vec{u} = \vec{f}.$$

Résoudre ce système revient alors à déterminer l'approximation EF  $u_h$ .

## Détails de l'algorithme 2

Reprenons les notations de la partie précédente, mais cette fois-ci en considérant l'équation (4.2) définissant l'estimateur  $\tilde{e}$ .

Le début de l'algorithme 2 est classique. On y définit le maillage sur le carré  $]0, 1[^2$ , les différents espaces EF (dont l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^f$ , noté **Vhf** dans l'algorithme, dans lequel se trouvera l'estimateur  $\tilde{e}$ ), la constante de pénalisation, les fonctions appartenant aux différents espaces EF ainsi que les données du problème. On calcule l'approximation EF  $U$  à l'aide de l'algorithme 1. On définit ensuite la forme bilinéaire **a** ainsi que la forme linéaire **F** et on calcule la matrice de rigidité, notée **B** dans l'algorithme et le second membre du système linéaire, noté **fhf** [].

Le second membre **fhf** [] est un vecteur de taille égale à  $N$ , la dimension de l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  et ses composantes sont données par  $(F(\varphi_j))_{1 \leq j \leq N}$ . Or, d'après (4.2), **fhf** [] n'est pas tout à fait le bon second membre pour notre système linéaire, celui-ci devrait en fait être le vecteur :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} F(\varphi_1 - I(\varphi_1)) \\ \vdots \\ F(\varphi_N - I(\varphi_N)) \end{pmatrix}.$$

Cependant, il n'est pas possible de calculer ce second membre aussi directement que `fhf []` avec FreeFem++. Cela dit, nous pouvons essayer de le calculer à partir de `fhf []`. On a besoin pour cela d'introduire les lignes suivantes qui méritent un peu plus d'attention :

```
for(int k=0; k<Th.nt; k++)
for(int j=0; j<3; j++)
{
fhf [] [Vhf(k,j)]=-0.5*fhf [] [Vhf(k,3+(j+1) mod 3)]
-0.5*fhf [] [Vhf(k,3+(j+2) mod 3)]
}
```

FreeFem++ possède un système de numérotation des noeuds des degrés de liberté pour les espaces EF sur un maillage donné. Un noeud peut être identifié grâce à une paire de coordonnées  $(k, j)$ . La coordonnée  $k$  désignant le numéro du triangle auquel appartient ce noeud et  $j$  son numéro au sein de ce triangle. Comme à chaque noeud correspond une fonction chapeau, pour un vecteur tel que `fhf []` il est possible de relier chacune de ses coordonnées à un noeud de l'espace `Vhf`. La commande `Vhf(k, j)` associe à une paire de coordonnées  $(k, j)$  le numéro de la fonction chapeau associée au noeud (voir Figure B.1). Ainsi, la commande `fhf [] [Vhf(k, j)]` donne la coordonnée du vecteur `fhf []` associée au  $j^{\text{ième}}$  noeud du  $k^{\text{ième}}$  triangle.

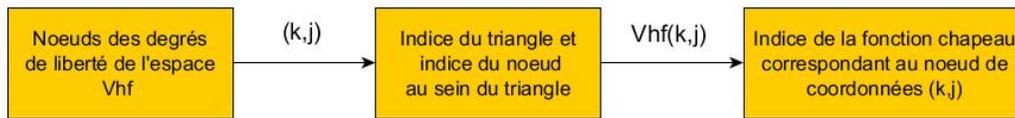


FIGURE B.1 – Indexation des noeuds des degrés de liberté et des coordonnées des vecteurs dans FreeFem++.

Regardons maintenant, pour une fonction chapeau  $\varphi_k$  particulière, son image par l'application  $\text{Id} - I$  exprimée dans la base des fonctions chapeaux :

$$\varphi_k - I(\varphi_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,k} \varphi_i.$$

Par linéarité de la fonction  $F$  on constate alors que :

$$F(\varphi_k - I(\varphi_k)) = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,k} F(\varphi_i).$$

Ainsi, si on sait comment agit l'application  $\text{Id} - I$  sur les fonctions cha-peaux, on saura calculer  $\vec{f}$  à partir de  $\text{fhf}[]$ . Remarquons que l'application  $\text{Id} - I$  va agir de façon identique sur chaque triangle du maillage, on peut donc se restreindre à un triangle  $T$  particulier. C'est en fait le rôle de la première boucle `for` :

```
for(int k=0; k<Th.nt; k++),
```

qui sert à parcourir le maillage  $\mathcal{T}_h$  triangle par triangle, `Th.nt` codant le nombre de triangle du maillage.

Comme l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  est l'espace EF  $\mathbb{P}_2$  les noeuds des degrés de libertés sont les trois sommets ainsi que les milieux des arêtes de chaque triangle. Numérotons les noeuds de degrés de liberté de  $T$  de la même façon que FreeFem ++ (voir Figure B.2).

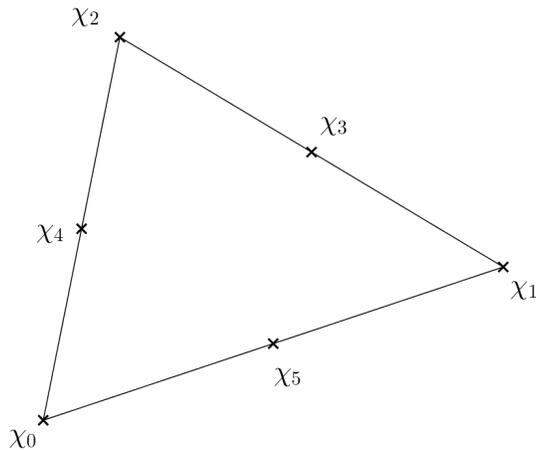


FIGURE B.2 – Numérotation des noeuds des degrés de liberté  $\mathbb{P}_2$  par FreeFem.

Considérons alors les fonctions chapeaux associées à ces noeuds,  $\varphi_j$  pour  $j$  entre 0 et 5. Observons alors l'action de  $\text{Id} - I$  sur la fonction  $\varphi_0$ . Comme  $\varphi_0$  vaut 1 en  $\chi_0$  et 0 en tous les autres noeuds, son interpolé  $I(\varphi_0)$  qui appartient à l'espace  $V_{T_h}^g$  (qui est l'espace EF  $\mathbb{P}_1$ ), va également valoir 1 en  $\chi_0$  et 0 sur les deux autres noeuds des degrés de liberté de l'espace  $V_{T_h}^g$ , c'est à dire en  $\chi_1$  et  $\chi_2$ . Cependant  $I(\varphi_0)$  est affine sur  $T$ , cette fonction va donc valoir  $\frac{1}{2}$  en les milieux de  $[\chi_0\chi_1]$  et  $[\chi_0\chi_2]$ , autrement dit en  $\chi_5$  et  $\chi_4$ . Ainsi, si on exprime  $I(\varphi_0)$  dans la base des fonctions chapeaux on obtient :

$$I(\varphi_0) = \varphi_0 + \frac{1}{2}(\varphi_4 + \varphi_5).$$

D'où dans cette même base :

$$\varphi_0 - I(\varphi_0) = -\frac{1}{2}(\varphi_4 + \varphi_5).$$

De la même façon on obtient :

$$\varphi_1 - I(\varphi_1) = -\frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_5),$$

et :

$$\varphi_2 - I(\varphi_2) = -\frac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4).$$

Regardons maintenant le cas d'une fonction chapeau correspondant au milieu d'une arête, par exemple  $\varphi_3$ . Comme  $\varphi_3$  vaut zéro en tous les noeuds des degrés de liberté de l'espace  $V_{T_h}^g$ , alors  $I(\varphi_3) = 0$ . D'où :

$$\varphi_3 - I(\varphi_3) = \varphi_3.$$

Et de même :

$$\varphi_4 - I(\varphi_4) = \varphi_4,$$

et :

$$\varphi_5 - I(\varphi_5) = \varphi_5.$$

Ainsi, on obtient la formule générale pour  $j$  entre 0 et 2 :

$$\varphi_j - I(\varphi_j) = -\frac{1}{2}(\varphi_{j_1} + \varphi_{j_2}),$$

avec  $j_1 = 3 + (j + 1) \bmod (3)$  et  $j_2 = 3 + (j + 2) \bmod (3)$ .  
Et pour  $j$  entre 3 et 5 :

$$\varphi_j - I(\varphi_j) = \varphi_j.$$

La deuxième boucle **for** :

```
for(int j=0; j<3; j++)
{
fhf [] [Vhf(k, j)]=-0.5*fhf [] [Vhf(k,3+(j+1) mod 3)]
-0.5*fhf [] [Vhf(k,3+(j+2) mod 3)]
}
```

va donc parcourir les trois premiers noeuds des degrés de liberté de chaque triangle du maillage pour changer la coordonnée du vecteur **fhf []** correspondant à ce noeud en la combinaison voulue d'autres coordonnées de **fhf []**. On obtient ainsi le second membre voulu pour le système linéaire et il ne reste alors plus qu'à le résoudre pour obtenir l'estimateur d'erreur.

### Détails de l'algorithme 3

Les algorithmes 2 et 3 sont identiques jusqu'au calcul du vecteur **fhf []**. Encore une fois le système linéaire obtenu à partir de la matrice **B** et du second membre **fhf []** n'est pas bon. En effet, l'estimateur  $\check{e}$  appartient au sous-espace  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  donc si on exprime  $\check{e}$  dans la base des fonctions chapeaux de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  on obtient :

$$\check{e} = \sum_{i \in I_0} e_i \varphi_i,$$

où  $I_0$  est le sous-ensemble de  $\{0, \dots, N\}$  des indices des fonctions chapeaux formant une base du sous-espace  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ .

Ainsi, si on décrit le système linéaire associé à l'équation globale définissant  $\check{e}$ , on obtient :

$$C\vec{e} = \vec{f},$$

avec  $C$  matrice de rigidité définie par :

$$C = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j \in I_0},$$

le vecteur  $\vec{e}$  qui est le vecteur des coordonnées de  $\check{e}$  dans la base de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  et le second membre  $\vec{f}$  défini par :

$$\vec{f} = (F(\varphi_j))_{j \in I_0}.$$

On constate alors que  $\vec{e}$  est la solution d'un système composé de la matrice  $C$  qui est une sous-matrice de la matrice  $B$  et du second membre  $\vec{f}$  qui est un sous-vecteur de  $\mathbf{fhf}[]$ . Encore une fois, le but sera d'extraire cette sous-matrice et ce sous-vecteur à partir de  $B$  et  $\mathbf{fhf}[]$ .

Intéressons nous aux trois lignes suivantes :

```
int Ndof2=Vhf.ndof/2, num=0
int[int] I(Ndof2)
real[int] fh3(Ndof2), eh3(Ndof2)
```

La première ligne définit le nombre de noeuds des degrés de liberté associés à l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ , que l'on peut aussi voir comme la dimension de cet espace. La troisième ligne introduit le sous-vecteur  $\vec{f}$ , noté ici **fh3** de taille **Ndof2** ainsi que le vecteur  $\vec{e}$ , noté **eh3**. La deuxième ligne introduit un vecteur **I** qui va nous servir à sélectionner les noeuds des degrés de liberté de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  parmi ceux de l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^f$ .

D'après (2.5), on constate que les noeuds des degrés de liberté de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  sont en fait les noeuds situés sur les milieux des arêtes des triangles du maillage. C'est pourquoi on utilise les deux boucles **for** suivantes pour parcourir l'ensemble de ces noeuds :

```

for(int k=0; k<Th.nt; k++)
for(int j=3; j<6; j++)
{
I[num]=Vhf(k,j)
fh3[num]=fhf [] [I[num]]
num++
}

```

A chaque itération de la seconde boucle, la coordonnée numéro `num` du vecteur `I` devient l'indice de la fonction chapeau (dans la base de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$ ) associée au noeud de coordonnées  $(k, j)$ . Ainsi, si une fonction chapeau possède l'indice  $l$  dans la base de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$  alors la  $l^{\text{ième}}$  coordonnée du vecteur `I` correspondra à l'indice de cette même fonction chapeau dans la base de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$ . Le vecteur `I` va donc nous permettre d'échanger les indices d'une fonction chapeau lorsqu'on la regarde comme fonction de base de  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  ou bien de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ .

La ligne :

```
fh3[num]=fhf [] [I[num]]
```

permet de créer le sous-vecteur voulu `fh3` à partir du vecteur `fhf`. Puis on incrémente la valeur de `num` à chaque itération. Passons alors aux dernières lignes de l'algorithme :

```

matrix C=B(I,I)
set (C,solver=sparse solver)
eh3=C-1*fh3

eh=0
for(int k=0;k<Ndof2;k++) eh [] [I[k]]=eh3[k]

```

La première ligne permet d'extraire de la matrice `B`, la sous-matrice `C` associée au système linéaire dont la solution est le troisième estimateur. Les deux lignes suivantes permettent de résoudre le système. On a alors obtenu un vecteur `eh3` de taille `Ndof2` composé des coordonnées de  $\vec{e}$  dans la base de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ .

Cependant, comme on cherche au final à calculer une fonction dans l'espace  $V_{\mathcal{T}_h}^f$  on doit réinjecter le vecteur `eh3` dans un vecteur de taille  $N$  de coordonnées nulles, sauf pour celles qui correspondent à des fonctions charpeaux de la base de  $V_{\mathcal{T}_h}^0$ . C'est le but des deux dernières lignes de l'algorithme :

```
eh=0  
for(int k=0;k<Ndof2;k++) eh[] [I[k]]=eh3[k]
```

# Bibliographie

- [1] Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [2] Grégoire Allaire. *Numerical analysis and optimization*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2007. An introduction to mathematical modelling and numerical simulation, Translated from the French by Alan Craig.
- [3] Jean-Marie Arnaudiès and Henri Fraysse. *Cours de mathématiques. 1*. Dunod Université : Ouvrages de Base. [Dunod University : Basic Works]. Dunod, Paris, 1987. Algèbre. [Algebra].
- [4] R. E. Bank and A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, 44(170) :283–301, 1985.
- [5] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [6] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [7] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983.