Remporter le championnat du monde de fléchettes sans se ruiner avec la méthode Multi-Level Monte-Carlo

Raphaël Bulle

PhD student

University of Luxembourg
Université de Bourgogne Franche-Comté

May 20, 2021

Plan

- Les règles presque officielles
- Choisir le bon matériel
- La méthode Monte-Carlo
- La méthode Multi-Level Monte-Carlo
- Fiction vs Réalité

Plan

- Les règles presque officielles
- Choisir le bon matériel
- La méthode Monte-Carlo
- La méthode Multi-Level Monte-Carlo
- Fiction vs Réalité

Les règles presque officielles

1/ Chaque participant peut choisir la (ou les) marque(s) de fléchettes qu'il souhaite.

Les règles presque officielles

1/ Chaque participant peut choisir la (ou les) marque(s) de fléchettes qu'il souhaite.

2/ Chaque participant peut lancer le nombre de fléchettes qu'il souhaite.

Les règles presque officielles

1/ Chaque participant peut choisir la (ou les) marque(s) de fléchettes qu'il souhaite.

2/ Chaque participant peut lancer le nombre de fléchettes qu'il souhaite.

3/ Chaque participant joue sur sa propre cible.

Les règles presque officielles

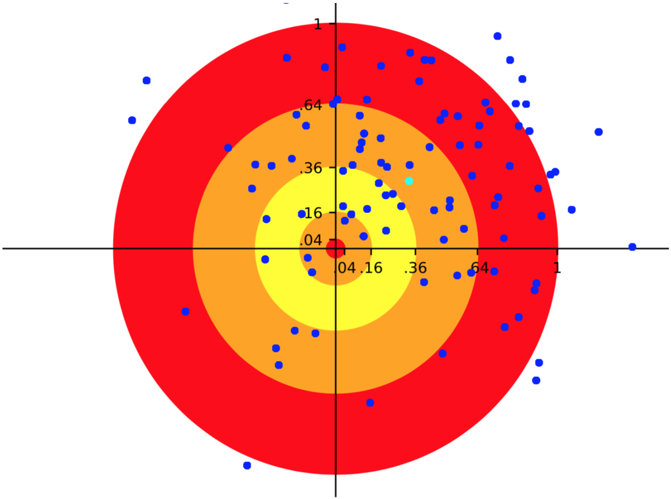
1/ Chaque participant peut choisir la (ou les) marque(s) de fléchettes qu'il souhaite.

2/ Chaque participant peut lancer le nombre de fléchettes qu'il souhaite.

3/ Chaque participant joue sur sa propre cible.

4/ Le participant dont la moyenne des impacts (i.e. barycentre) est la plus proche du centre de la cible (au sens de la distance euclidienne usuelle) est désigné vainqueur.

Exemple



Plan

- Les règles presque officielles
- Choisir le bon matériel
- La méthode Monte-Carlo
- La méthode Multi-Level Monte-Carlo
- Fiction vs Réalité

Choisir le bon matériel

Le centre de la cible, $0 := (0,0)$ peut être vu comme l'espérance d'une fléchette idéale, notée $\hat{X}$ telle que,

$$\hat{X} \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id}).$$

Choisir le bon matériel

Il existe $27 = L + 1$ marques de fléchettes dans le commerce. Pour chaque $l \in \{0, \cdots, L\}$, les fléchettes de la marque l sont représentées par

$$X_l \sim \mathcal{N}(m_l, \mathrm{Id}),$$

Choisir le bon matériel

Il existe $27 = L + 1$ marques de fléchettes dans le commerce. Pour chaque $l \in \{0, \cdots, L\}$, les fléchettes de la marque l sont représentées par

$$X_l \sim \mathcal{N}(m_l, \mathrm{Id}),$$

avec $m_l \in \mathbb{R}^2$ l'espérance de la fléchette X_l.

Choisir le bon matériel

Il existe $27 = L + 1$ marques de fléchettes dans le commerce. Pour chaque $l \in \{0, \cdots, L\}$, les fléchettes de la marque l sont représentées par

$$X_l \sim \mathcal{N}(m_l, \mathrm{Id}),$$

avec $m_l \in \mathbb{R}^2$ l'espérance de la fléchette X_l.
On appellera *biais* de la fléchette X_l, noté b_l, la distance (euclidienne) entre son espérance et celle de la fléchette parfaite

$$b_l := \left\| \mathbb{E}\left[X_l\right] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \right\| = \|m_l\|.$$

Choisir le bon matériel

Exemples de quelques marques de fléchettes disponibles sur le marché:

Choisir le bon matériel

Exemples de quelques marques de fléchettes disponibles sur le marché:

X_0
Dart-it-yourself™

$\ldots$

« Inutile de se ruiner quand on a du talent. »

Biais: $b_0 = 0,5$
Prix: $p_0 = 0,1$ €.

Choisir le bon matériel

Exemples de quelques marques de fléchettes disponibles sur le marché:

X_0 Dart-it-yourself^{TM}		X_{13} La fléchette tranquille^{TM}	
	...		...
« Inutile de se ruiner quand on a du talent. »		*«Une fléchette, qu'elle est bien pour la lancer. »*	
Biais: $b_0 = 0,5$ Prix: $p_0 = 0,1$ €.		Biais: $b_l = 0,2$ Prix: $p_l = 1,6$ €.	

Choisir le bon matériel

Exemples de quelques marques de fléchettes disponibles sur le marché:

X_0
Dart-it-yourself™

« *Inutile de se ruiner quand on a du talent.* »

Biais: $b_0 = 0,5$
Prix: $p_0 = 0,1$ €.

...

X_{13}
La fléchette tranquille™

«*Une fléchette, qu'elle est bien pour la lancer.* »

Biais: $b_l = 0,2$
Prix: $p_l = 1,6$ €.

...

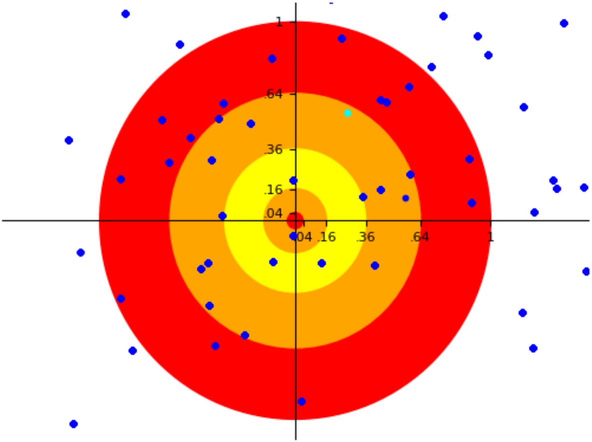
X_L
FléchetteX™

«*Ma source d'inspiration.*»
-Elon Musk

Biais: $b_L = 0,082$
Prix: $p_L = 40,63$ €.

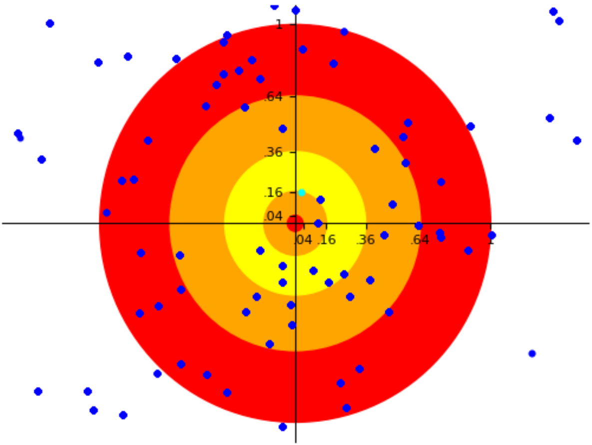
Exemple: X_0: Dart-it-yourself™

(100 fléchettes)



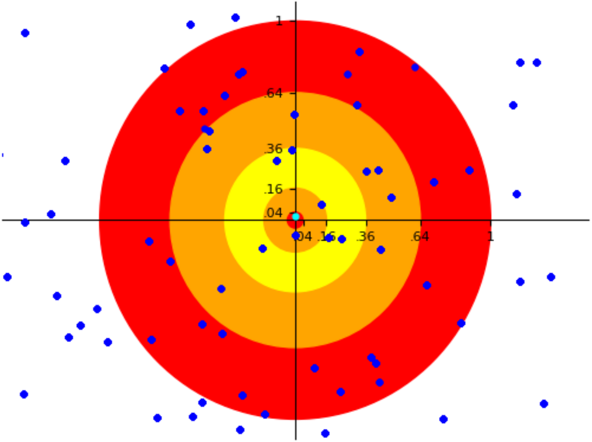
Exemple: X_l: La fléchette tranquille™

(100 fléchettes)



Exemple: X_L: FléchetteX™

(100 fléchettes)



Plan

- Les règles presque officielles
- Choisir le bon matériel
- La méthode Monte-Carlo
- La méthode Multi-Level Monte-Carlo
- Fiction vs Réalité

La méthode Monte-Carlo

Votre cousin Gontran (et rival de toujours) a décidé, lui aussi, de participer au championnat du monde de fléchettes.

La méthode Monte-Carlo

Votre cousin Gontran (et rival de toujours) a décidé, lui aussi, de participer au championnat du monde de fléchettes.

Gontran est riche, il décide donc de n'utiliser que des fléchettes FléchetteX™.

La méthode Monte-Carlo

Autrement dit, Gontran veut approcher $\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] = 0$ à l'aide de l'estimateur de Monte-Carlo (biaisé) associé à la variable aléatoire X_L.

$$\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right] := \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} X_L^i.$$

La méthode Monte-Carlo

Autrement dit, Gontran veut approcher $\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] = 0$ à l'aide de l'estimateur de Monte-Carlo (biaisé) associé à la variable aléatoire X_L.

$$\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right] := \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} X_L^i.$$

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \mathbb{E}\left[X_L\right] \approx \mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right].$$

La méthode Monte-Carlo

Soit $(X^i)_i$ une suite de variables aléatoires dans $L^2(\Omega)$ indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2.

La méthode Monte-Carlo

Soit $(X^i)_i$ une suite de variables aléatoires dans $L^2(\Omega)$ indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2.

Loi forte des grands nombres

$$\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X] := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

La méthode Monte-Carlo

Soit $(X^i)_i$ une suite de variables aléatoires dans $L^2(\Omega)$ indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2.

Loi forte des grands nombres

$$\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X] := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

Théorème Central Limite

$$\frac{\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X] - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$\text{MSE} \quad := \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right]$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$\begin{aligned}
\text{MSE} \quad &:= \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2
\end{aligned}$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$\begin{aligned}
\text{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right\|^2\right] - \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 + \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[X_L\right]\right\|^2
\end{aligned}$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 + \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[X_L\right]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \left\|m_L\right\|^2
\end{aligned}
$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$
\begin{aligned}
\text{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X_L] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X_L]\right\|^2\right] - \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X_L]\right]\right\|^2 + \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}[X_L]\right]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[X_L]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \|m_L\|^2 \\
&= 2N^{-1} + b_L^2
\end{aligned}
$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$
\begin{aligned}
\text{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 + \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[X_L\right]\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + \left\|m_L\right\|^2 \\
&= 2N^{-1} + b_L^2 \\
&= \text{Variance} + \text{Biais}^2
\end{aligned}
$$

La méthode Monte-Carlo

Gontran veut être sûr d'acheter suffisamment de fléchettes pour s'assurer la victoire. Il étudie donc l'erreur des moindres carrés (Mean Squared Error). Etant donnée une tolérance ε,

$$
\begin{aligned}
\text{MSE} \quad &:= \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_N^{\mathrm{MC}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
&= \quad 2N^{-1} \quad + \quad \left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[X_L\right]\right\|^2 \\
&= \quad 2N^{-1} \quad + \quad \left\|m_L\right\|^2 \\
&= \quad 2N^{-1} \quad + \quad b_L^2 \\
&= \quad \text{Variance} \quad + \quad \text{Biais}^2 \\
&\leqslant \quad \varepsilon^2 \quad + \quad 0,082^2.
\end{aligned}
$$

La méthode Monte-Carlo

Autrement dit,

$$2N^{-1} \leqslant \varepsilon^2,$$

La méthode Monte-Carlo

Autrement dit,

$$2N^{-1} \leqslant \varepsilon^2,$$

c'est à dire,

$$N \geqslant \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

La méthode Monte-Carlo

Autrement dit,

$$2N^{-1} \leqslant \varepsilon^2,$$

c'est à dire,

$$N \geqslant \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Gontran choisit $\varepsilon = 10^{-1}$, ainsi

$$N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{10^{-2}} \right\rceil = 200.$$

La méthode Monte-Carlo

Autrement dit,

$$2N^{-1} \leqslant \varepsilon^2,$$

c'est à dire,

$$N \geqslant \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Gontran choisit $\varepsilon = 10^{-1}$, ainsi

$$N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{10^{-2}} \right\rceil = 200.$$

Participer au championnat lui coûtera donc...

$$N \times p_L = 200 \times 40,63 = 8126€!$$

Plan

- Les règles presque officielles
- Choisir le bon matériel
- La méthode Monte-Carlo
- La méthode Multi-Level Monte-Carlo
- Fiction vs Réalité

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous vous demandez alors,

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous vous demandez alors,
« Comment pourrais-je obtenir une variance aussi petite, sans casser ma tirelire ?»

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous décidez d'utiliser un peu de toutes les marques de fléchettes disponibles.

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \mathbb{E}\left[X_L\right]$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous décidez d'utiliser un peu de toutes les marques de fléchettes disponibles.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] &\approx \mathbb{E}\left[X_L\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[X_l - X_{l-1}\right]\end{aligned}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous décidez d'utiliser un peu de toutes les marques de fléchettes disponibles.

$$
\begin{array}{rcccccc}
\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] & \approx & \mathbb{E}\left[X_L\right] & & & & \\
 & = & \mathbb{E}\left[X_0\right] & + & \displaystyle\sum_{l=1}^{L} & & \mathbb{E}\left[X_l - X_{l-1}\right] \\
 & & \rotatebox{90}{$\approx$} & & & & \rotatebox{90}{$\approx$} \\
 & = & \displaystyle N_0^{-1}\sum_{i=1}^{N_0} X_0^i & + & \displaystyle\sum_{l=1}^{L} & & \displaystyle N_l^{-1}\sum_{i=1}^{N_l}\left(X_l^i - X_{l-1}^i\right)
\end{array}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous décidez d'utiliser un peu de toutes les marques de fléchettes disponibles.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] &\approx \mathbb{E}\left[X_L\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[X_l - X_{l-1}\right] \\
&\qquad \wr \qquad\qquad\qquad\qquad \wr \\
&= N_0^{-1} \sum_{i=1}^{N_0} X_0^i + \sum_{l=1}^{L} N_l^{-1} \sum_{i=1}^{N_l} \left(X_l^i - X_{l-1}^i\right) \\
&= \mathrm{E}_{N_0}^{\mathrm{MC}}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[X_l - X_{l-1}\right].
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_0}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_l}\left[X_l - X_{l-1}\right].$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_0}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_l}\left[X_l - X_{l-1}\right].$$

En posant,

$$Y_l = \begin{cases} X_0, & \text{si } l = 0 \\ X_l - X_{l-1}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \mathrm{E}_{N_0}^{\mathrm{MC}}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[X_l - X_{l-1}\right].$$

En posant,

$$Y_l = \begin{cases} X_0, & \text{si } l = 0 \\ X_l - X_{l-1}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut réécrire,

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right] \qquad .$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_0}\left[X_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_l}\left[X_l - X_{l-1}\right].$$

En posant,

$$Y_l = \begin{cases} X_0, & \text{si } l = 0 \\ X_l - X_{l-1}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut réécrire,

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] \approx \sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_l}\left[Y_l\right] =: \mathrm{E}^{\mathrm{ML}}_{L}\left[X_L\right].$$

Vous venez de créer l'estimateur Multi-Level Monte-Carlo!

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

$$\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right] = \sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right].$$

Quels sont les avantages de cet estimateur ?

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Niveau	Marque	Biais/ prix	[Fléchettes] $\xrightarrow{N^{-1}\sum}$ Estimateur MC
0	Dart-it-yourself™	$+/-$	$\left[Y_0^{(1)},\ Y_0^{(2)},\ \cdots,\ Y_0^{(N_0-1)},\ Y_0^{(N_0)}\right] \xrightarrow{N_0^{-1}\sum} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_0}\left[Y_0\right]$
$\vdots$			
l	La fléchette tranquille™	$\sim / \sim$	$\left[Y_l^{(1)},\cdots,Y_l^{(N_l-1)},Y_l^{(N_l)}\right] \xrightarrow{N_l^{-1}\sum} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_l}\left[Y_l\right]$
$\vdots$			
L	FléchetteX™	$-/+$	$\left[Y_L^{(1)},\cdots,Y_L^{(N_L)}\right] \xrightarrow{N_L^{-1}\sum} \mathrm{E}^{\mathrm{MC}}_{N_L}\left[Y_L\right]$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Niveau	Marque	Biais/ prix	[Fléchettes] $\xrightarrow{N^{-1}\sum}$ Estimateur MC
0	Dart-it-yourself™	$+/-$	$\left[Y_0^{(1)},\ Y_0^{(2)},\ \cdots,\ Y_0^{(N_0-1)},\ Y_0^{(N_0)}\right] \xrightarrow{N_0^{-1}\sum} \mathrm{E}_{N_0}^{\mathrm{MC}}\left[Y_0\right]$
$\vdots$			
l	La fléchette tranquille™	$\sim / \sim$	$\left[Y_l^{(1)}, \cdots, Y_l^{(N_l-1)}, Y_l^{(N_l)}\right] \xrightarrow{N_l^{-1}\sum} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]$
$\vdots$			
L	FléchetteX™	$-/+$	$\left[Y_L^{(1)}, \cdots, Y_L^{(N_L)}\right] \xrightarrow{N_L^{-1}\sum} \mathrm{E}_{N_L}^{\mathrm{MC}}\left[Y_L\right]$

$$\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$\text{MSE} \quad := \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right]$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$\begin{aligned}
\text{MSE} \quad &:= \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right\|^2\right] - \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2
\end{aligned}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$\begin{aligned}
\text{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2
\end{aligned}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$\begin{aligned}
\text{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \\
&= \sum_{l=0}^{L}\left[\mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2\right] \quad + \quad \left\|\sum_{l=0}^{L}\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2
\end{aligned}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$
\begin{aligned}
\text{MSE} &:= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}[X_L] - \mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}[X_L]\right\|^2\right] - \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}[X_L]\right]\right\|^2 + \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}[X_L]\right]\right\|^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}[Y_l]\right\|^2\right] - \left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}[Y_l]\right]\right\|^2 + \left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}[Y_l]\right]\right\|^2 \\
&= \sum_{l=0}^{L}\left[\mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}[Y_l]\right\|^2\right] - \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}[Y_l]\right]\right\|^2\right] + \left\|\sum_{l=0}^{L} \mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}[Y_l]\right]\right\|^2 \\
&= \sum_{l=0}^{L} 2N_l^{-1} V_l^2 + b_L^2
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$
\begin{aligned}
\text{MSE} \quad :=& \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
=& \quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
=& \quad \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \\
=& \quad \sum_{l=0}^{L}\left[\mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2\right] \quad + \quad \left\|\sum_{l=0}^{L} \mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \\
=& \quad \sum_{l=0}^{L} 2 N_l^{-1} V_l^2 \quad + \quad b_L^2 \\
=& \quad \text{Variance} \quad + \quad \text{Biais}
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Vous étudiez également l'erreur des moindres carrés de votre estimateur

$$
\begin{aligned}
\text{MSE} \quad := &\quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]-\mathbb{E}\left[\hat{X}\right]\right\|^2\right] \\
= &\quad \mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right]\right\|^2 \\
= &\quad \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \quad + \quad \left\|\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{L}\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \\
= &\quad \sum_{l=0}^{L}\left[\mathbb{E}\left[\left\|\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right\|^2\right]-\left\|\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2\right] \quad + \quad \left\|\sum_{l=0}^{L}\mathbb{E}\left[\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right]\right\|^2 \\
= &\quad \sum_{l=0}^{L}2N_l^{-1}V_l^2 \quad + \quad b_L^2 \\
= &\quad \text{Variance} \quad + \quad \text{Biais} \\
\leqslant &\quad \varepsilon^2 \quad + \quad 0,082^2.
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Comme Gontran, votre objectif est de garder une variance aussi petite que voulu, autrement dit trouver une suite de nombres de fléchettes $(N_l)_{l=0}^{L}$ telle que,

$$\text{Variance} := \sum_{l=0}^{L} 2N_l^{-1}V_l^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Cependant, vous voulez également minimiser le coût en fléchettes. Le coût total de votre estimateur étant,

$$C := \text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) \quad = \quad \text{Coût}\left(\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right)$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Cependant, vous voulez également minimiser le coût en fléchettes. Le coût total de votre estimateur étant,

$$
\begin{aligned}
C := \text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) &= \text{Coût}\left(\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} \text{Coût}\left(\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right)
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Cependant, vous voulez également minimiser le coût en fléchettes. Le coût total de votre estimateur étant,

$$
\begin{aligned}
C := \text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) &= \text{Coût}\left(\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} \text{Coût}\left(\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \text{Coût}(Y_l)
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Cependant, vous voulez également minimiser le coût en fléchettes. Le coût total de votre estimateur étant,

$$\begin{aligned}
C := \text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) &= \text{Coût}\left(\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} \text{Coût}\left(\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \text{Coût}(Y_l) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \left(\text{Coût}(X_l) + \text{Coût}(X_{l-1})\right)
\end{aligned}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Cependant, vous voulez également minimiser le coût en fléchettes. Le coût total de votre estimateur étant,

$$
\begin{aligned}
C := \text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) &= \text{Coût}\left(\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} \text{Coût}\left(\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \text{Coût}(Y_l) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \left(\text{Coût}(X_l) + \text{Coût}(X_{l-1})\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l (p_l + p_{l-1})
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Cependant, vous voulez également minimiser le coût en fléchettes. Le coût total de votre estimateur étant,

$$
\begin{aligned}
C := \text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) &= \text{Coût}\left(\sum_{l=0}^{L} \mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} \text{Coût}\left(\mathrm{E}_{N_l}^{\mathrm{MC}}\left[Y_l\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \text{Coût}(Y_l) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l \left(\text{Coût}(X_l) + \text{Coût}(X_{l-1})\right) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l (p_l + p_{l-1}) \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l C_l.
\end{aligned}
$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Finalement, votre objectif est de trouver une suite d'entiers $(N_l)_{l=0}^{L}$ telle que,

$$\sum_{l=0}^{L} 2N_l^{-1}V_l^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

et qui minimise,

$$\text{Coût}\left(\mathrm{E}_L^{\mathrm{ML}}\left[X_L\right]\right) = \sum_{l=0}^{L} N_l C_l.$$

(Les valeurs $(V_l)_{l=0}^{L}$ et $(C_l)_{l=0}^{L}$ étant données.)

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

C'est un problème d'optimisation sous contrainte:

Problème

Minimiser,

$$C(N_0, \cdots, N_L) = \sum_{l=0}^{L} N_l C_l,$$

sous la contrainte,

$$\sum_{l=0}^{L} 2 N_l^{-1} V_l^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

Une fois ce problème de minimisation résolu, on obtient,

$$N_l = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{V_l^2}{C_l}} \sum_{k=0}^{L} \sqrt{2 C_k V_k^2} \right\rceil .$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

En utilisant les valeurs $(V_l)_l$ et $(C_l)_l$, vous calculez chacun des N_l:

Marques	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.1	1.4	1.8	2.3	2.9	3.6	4.6	5.7	7.2
Vl	1	0.659...	0.435...	0.287...	0.189...	0.125	0.082...	0.054...	0.035...	0.023...	0.015...	0.010...	0.006...	0.004...	0.002...	0.001...	0.001...
Nl	2079	1505	1089	788	571	413	299	216	157	114	82	60	43	32	23	17	12

Marques	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Cl	9.1	11.5	14.5	18.2	23	28.9	36.4	45.9	57.9	72.9
Vl	0.0008...	0.0005...	0.0003...	0.0002...	0.0001...	0.0001...	7.0111e-5	4.6256e-5	3.05176e-5	2.01341e-5
Nl	9	7	5	4	3	2	2	1	1	1

Finalement, participer au championnat vous coûtera...

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

En utilisant les valeurs $(V_l)_l$ et $(C_l)_l$, vous calculez chacun des N_l:

Marques	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.1	1.4	1.8	2.3	2.9	3.6	4.6	5.7	7.2
Vl	1	0.659...	0.435...	0.287...	0.189...	0.125	0.082...	0.054...	0.035...	0.023...	0.015...	0.010...	0.006...	0.004...	0.002...	0.001...	0.001...
Nl	2079	1505	1089	788	571	413	299	216	157	114	82	60	43	32	23	17	12

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
9.1	11.5	14.5	18.2	23	28.9	36.4	45.9	57.9	72.9
0.0008...	0.0005...	0.0003...	0.0002...	0.0001...	0.0001...	7.0111e-5	4.6256e-5	3.05176e-5	2.01341e-5
9	7	5	4	3	2	2	1	1	1

Finalement, participer au championnat vous coûtera...

$$C = \sum_{l=0}^{L} N_l C_l = 3883 \text{ €} \quad \text{(seulement !)}$$

La méthode Multi-Level Monte-Carlo

En utilisant les valeurs $(V_l)_l$ et $(C_l)_l$, vous calculez chacun des N_l:

Marques	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cl	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	1.1	1.4	1.8	2.3	2.9	3.6	4.6	5.7	7.2
Vl	1	0.659...	0.435...	0.287...	0.189...	0.125	0.082...	0.054...	0.035...	0.023...	0.015...	0.010...	0.006...	0.004...	0.002...	0.001...	0.001...
Nl	2079	1505	1089	788	571	413	299	216	157	114	82	60	43	32	23	17	12

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
9.1	11.5	14.5	18.2	23	28.9	36.4	45.9	57.9	72.9
0.0008...	0.0005...	0.0003...	0.0002...	0.0001...	0.0001...	7.0111e-5	4.6256e-5	3.05176e-5	2.01341e-5
9	7	5	4	3	2	2	1	1	1

Finalement, participer au championnat vous coûtera...

$$C = \sum_{l=0}^{L} N_l C_l = 3883 \text{ €} \quad \text{(seulement !)}$$

Autrement dit, le coût est divisé par 2 par rapport à Monte-Carlo, alors que l'on a conservé la même variance!

Plan

- Les règles presque officielles
- Choisir le bon matériel
- La méthode Monte-Carlo
- La méthode Multi-Level Monte-Carlo
- Fiction vs Réalité

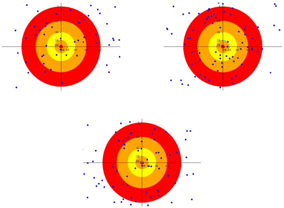
Fiction vs Réalité

Fiction vs Réalité

Fiction	Réalité

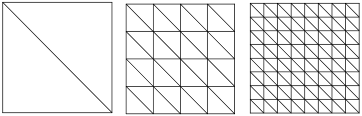
Fiction vs Réalité

Fiction



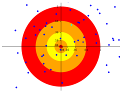
Réalité

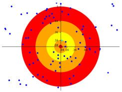
$$-\mathrm{div}(\exp(a)\nabla u) = f$$

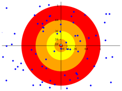


Fiction vs Réalité

Fiction

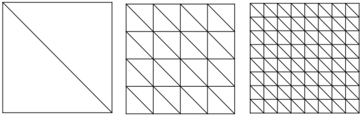


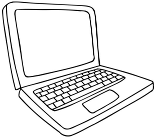




Réalité

$$-\mathrm{div}(\exp(a)\nabla u) = f$$

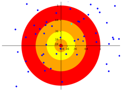
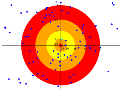
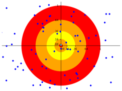




Fiction vs Réalité

Fiction

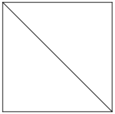
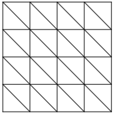
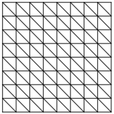
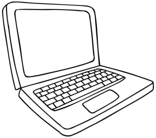



$(b_l)_{l=0}^{L}, \quad (V_l)_{l=0}^{L}, \quad (C_l)_{l=0}^{L}$

Réalité

$$-\mathrm{div}(\exp(a)\nabla u) = f$$

???, ???, $(C_l)_{l=0}^{L}$

Merci de votre attention!