Méthodes éléments finis et estimation d'erreur pour l'étude du ménisque.

Raphaël Bulle

Stéphane P.A. Bordas, Jack S. Hale,

Franz Chouly, Alexei Lozinski,

Olga Barrera

University of Luxembourg
Université de Bourgogne Franche-Comté
Oxford Brookes University

May 7, 2021

Estimation a posteriori de l'erreur due à la discrétisation par éléments finis d'équations aux dérivées partielles fractionnaires et application à la poroélasticité du ménisque.

Université de Bourgogne Franche-Comté,

campus Bouloie (Besançon)

Mathématiques appliquées

University of Luxembourg,

campus Belval (Esch-sur-Alzette)

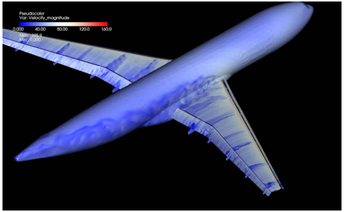
Computational engineering

Introduction

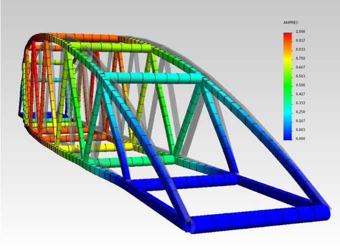
- Introduction
- Etude du ménisque
- Test de compression confinée
- Discrétisation par éléments finis
- Estimation d’erreur et raffinement adaptatif

Introduction

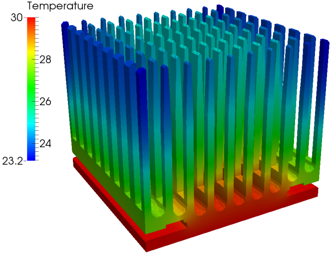
Les méthodes éléments finis sont utilisées dans tous les domaines de l'ingénierie:



https://doi.org/10.2514/6.2014-0917



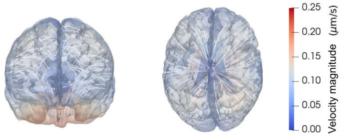
http://www.hadecgroup.com.au/finite-element-analysis/attachment/12/



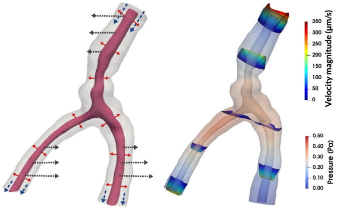
https://quickersim.com/cfdtoolbox/heat-transfer/

Introduction

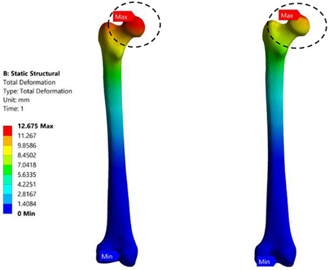
Les méthodes éléments finis sont utilisées dans tous les domaines de l'ingénierie:



https://doi.org/10.1186/s12987-019-0152-7



https://doi.org/10.1371/journal.pone.0244442

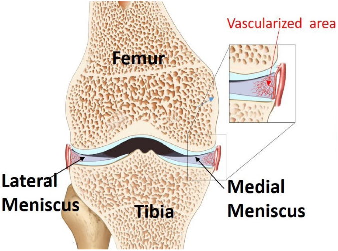


https://doi.org/10.2174/1874120701812010115

Etude du ménisque

Etude du ménisque

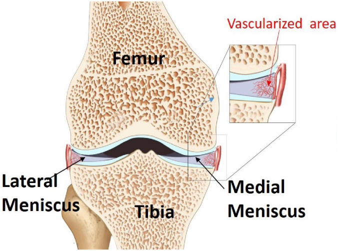
Le ménisque joue un rôle crucial dans le fonctionnement du genou:



Etude du ménisque

Le ménisque joue un rôle crucial dans le fonctionnement du genou:

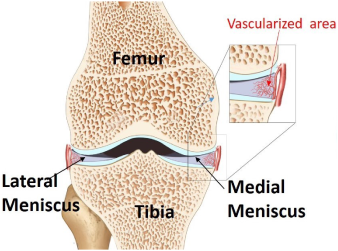
- participe à la cohésion du genou,



Etude du ménisque

Le ménisque joue un rôle crucial dans le fonctionnement du genou:

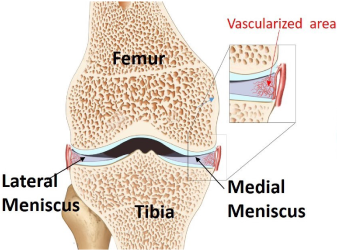
- participe à la cohésion du genou,
- permet la lubrification de l'articulation,



Etude du ménisque

Le ménisque joue un rôle crucial dans le fonctionnement du genou:

- participe à la cohésion du genou,
- permet la lubrification de l'articulation,
- soutient 45 à 75% de la charge.



Etude du ménisque

La dégénérescence du ménisque a des conséquences parfois graves:

- elle touche 35% de la population,

Etude du ménisque

La dégénérescence du ménisque a des conséquences parfois graves:

- elle touche 35% de la population,
- est soupçonnée d'être annonciatrice d'arthrose,

Etude du ménisque

La dégénérescence du ménisque a des conséquences parfois graves:

- elle touche 35% de la population,
- est soupçonnée d'être annonciatrice d'arthrose,
- une ablation du ménisque entraîne une répartition moins homogène de la charge sur le tibia, pouvant conduire à la dégénérescence du cartilage articulaire.

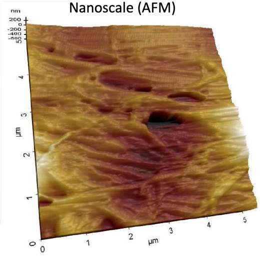
Etude du ménisque

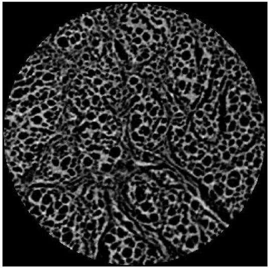
La dégénérescence du ménisque a des conséquences parfois graves:

- elle touche 35% de la population,
- est soupçonnée d'être annonciatrice d'arthrose,
- une ablation du ménisque entraîne une répartition moins homogène de la charge sur le tibia, pouvant conduire à la dégénérescence du cartilage articulaire.

Les propriétés biomécaniques du ménisque sont encore mal comprises ce qui empêche la fabrication de prothèse satisfaisante.

Etude du ménisque

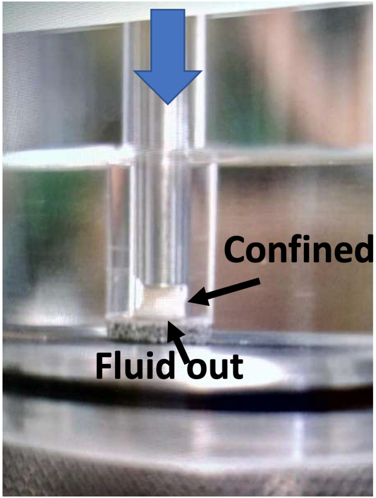




Test de compression confinée

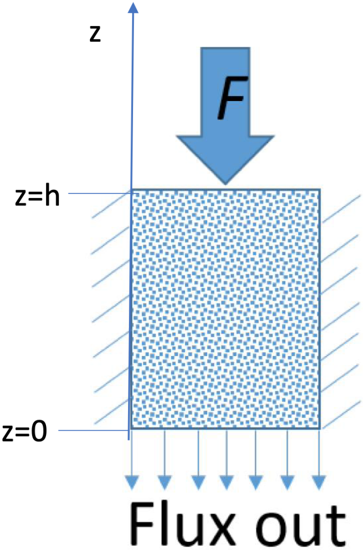
Test de compression confinée

On cherche à savoir comment se ré-parti la pression dans les pores lorsque le ménisque est comprimé.



Test de compression confinée

On cherche à savoir comment se répartit la pression dans les pores lorsque le ménisque est comprimé.



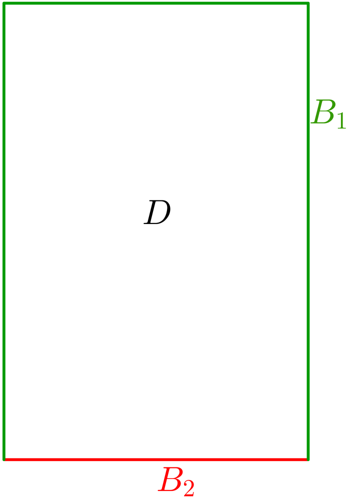
Test de compression confinée

Modèle: équation de diffusion

$$
\begin{aligned}
p - \Delta p &= f && \text{dans } D, \\
p &= 0 && \text{sur } B_1, \\
\frac{\partial p}{\partial n} &= 0 && \text{sur } B_2,
\end{aligned}
$$

où,

$$\Delta p(x, y) = \frac{\partial^2 p(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x,y)}{\partial y^2}.$$



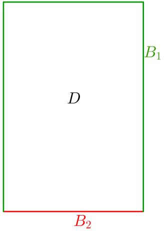
Discrétisation par éléments finis

Discrétisation par éléments finis

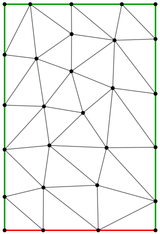
On cherche à résoudre l'équation de diffusion numériquement.

$$
\begin{aligned}
p - \Delta p &= f \quad \text{dans } D,\\
p &= 0 \quad \text{sur } B_1,\\
\frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } B_2,
\end{aligned}
\qquad \longrightarrow \qquad A\overline{p} = f
$$

Système de taille $N \times N$.



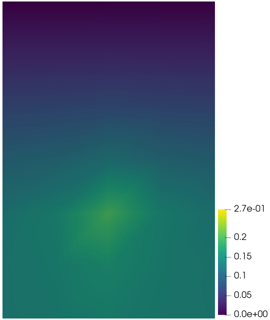
$\longrightarrow$

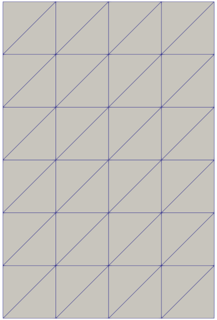


Discrétisation par éléments finis

$$A\overline{p} = f, \qquad \overline{p} \simeq p.$$

On résout ce système linéaire pour obtenir une approximation $\overline{p}$ de la pression des pores p.





Discrétisation par éléments finis

Questions:

Discrétisation par éléments finis

Questions:

- L'approximation $\overline{p}$ qu'on vient de calculer est-elle (suffisamment) bonne ?

Discrétisation par éléments finis

Questions:

- L'approximation $\overline{p}$ qu'on vient de calculer est-elle (suffisamment) bonne ?
- Peut-on mesurer l'erreur de discrétisation qu'on a commise ?

Discrétisation par éléments finis

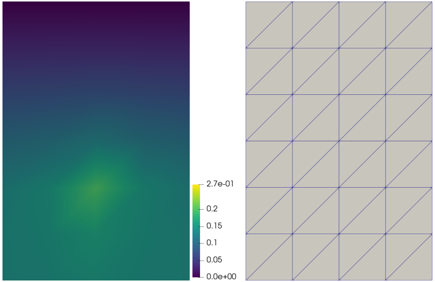
Questions:

- L'approximation $\overline{p}$ qu'on vient de calculer est-elle (suffisamment) bonne ?
- Peut-on mesurer l'erreur de discrétisation qu'on a commise ?
- Peut-on utiliser cette information pour améliorer notre approximation ?

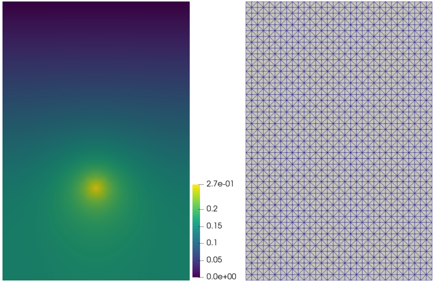
Discrétisation par éléments finis

Questions:

- L'approximation $\overline{p}$ qu'on vient de calculer est-elle (suffisamment) bonne ?
- Peut-on mesurer l'erreur de discrétisation qu'on a commise ?
- Peut-on utiliser cette information pour améliorer notre approximation ?



Système de taille 35×35



Système de taille 1617×1617

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

- Introduction
- Etude du ménisque
- Test de compression confinée
- Discrétisation par éléments finis
- **Estimation d'erreur et raffinement adaptatif**

Estimation d’erreur et raffinement adaptatif

Objectifs:

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Objectifs:

- Déterminer un estimateur de l'erreur de discrétisation *calculable*.

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Objectifs:

- Déterminer un estimateur de l'erreur de discrétisation *calculable*.
- Utiliser cet estimateur pour déterminer comment raffiner le maillage de sorte que l'erreur passe sous un seuil de tolérance.

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Objectifs:

- Déterminer un estimateur de l'erreur de discrétisation *calculable*.
- Utiliser cet estimateur pour déterminer comment raffiner le maillage de sorte que l'erreur passe sous un seuil de tolérance.
- Implémenter un algorithme de raffinement de maillage.

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Soit T un triangle du maillage. Si p_T est la solution de l'équation de diffusion et $\overline{p}_T$ son approximation par éléments finis sur T, on note $e_T = p_T - \overline{p}_T$ l'erreur.

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Soit T un triangle du maillage. Si p_T est la solution de l'équation de diffusion et $\overline{p}_T$ son approximation par éléments finis sur T, on note $e_T = p_T - \overline{p}_T$ l'erreur. On a alors:

$$e_T - \Delta e_T = (p_T - \overline{p}_T) - \Delta(p_T - \overline{p}_T)$$

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Soit T un triangle du maillage. Si p_T est la solution de l'équation de diffusion et $\overline{p}_T$ son approximation par éléments finis sur T, on note $e_T = p_T - \overline{p}_T$ l'erreur. On a alors:

$$\begin{aligned} e_T - \Delta e_T &= (p_T - \overline{p}_T) - \Delta(p_T - \overline{p}_T) \\ &= p_T - \Delta p_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T) \end{aligned}$$

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Soit T un triangle du maillage. Si p_T est la solution de l'équation de diffusion et $\overline{p}_T$ son approximation par éléments finis sur T, on note $e_T = p_T - \overline{p}_T$ l'erreur. On a alors:

$$\begin{aligned} e_T - \Delta e_T &= (p_T - \overline{p}_T) - \Delta(p_T - \overline{p}_T) \\ &= p_T - \Delta p_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T) \\ &= f_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T) \end{aligned}$$

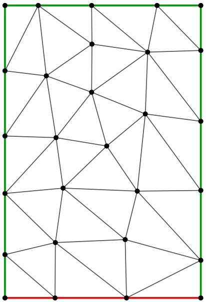
Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Soit T un triangle du maillage. Si p_T est la solution de l'équation de diffusion et $\overline{p}_T$ son approximation par éléments finis sur T, on note $e_T = p_T - \overline{p}_T$ l'erreur.

La fonction e_T vérifie l'équation:

$$e_T - \Delta e_T = f_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T),$$

sur chaque triangle du maillage.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Idée: On discrétise par les éléments finis l'équation de l'erreur.

$$e_T - \Delta e_T = f_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T) \qquad \longrightarrow \qquad A_T \overline{e}_T = g_T$$

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Idée: On discrétise par les éléments finis l'équation de l'erreur.

$$e_T - \Delta e_T = f_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T) \qquad \longrightarrow \qquad A_T \overline{e}_T = g_T$$

$$\overline{e}_T \simeq e_T = p_T - \overline{p}_T,$$

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Idée: On discrétise par les éléments finis l'équation de l'erreur.

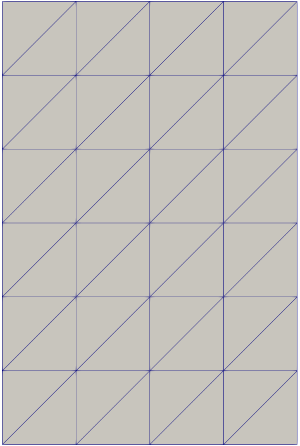
$$e_T - \Delta e_T = f_T - (\overline{p}_T - \Delta \overline{p}_T) \qquad \longrightarrow \qquad A_T \overline{e}_T = g_T$$

$$\overline{e}_T \simeq e_T = p_T - \overline{p}_T,$$

$$\sum_T \overline{e}_T = \overline{e} \simeq p - \overline{p}.$$

Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

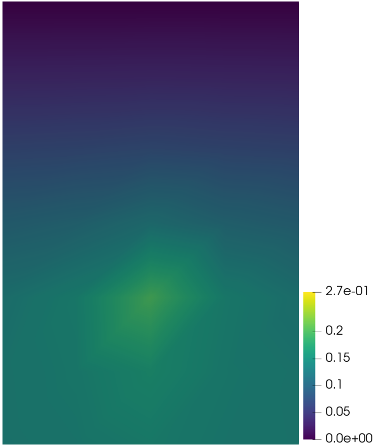
Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01
Etape 0: Initialisation.



Estimation d’erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d’estimation d’erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

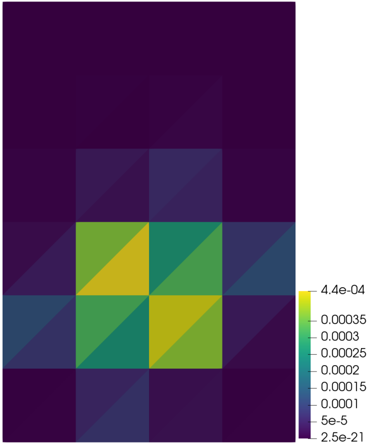
Etape 0: Résolution.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

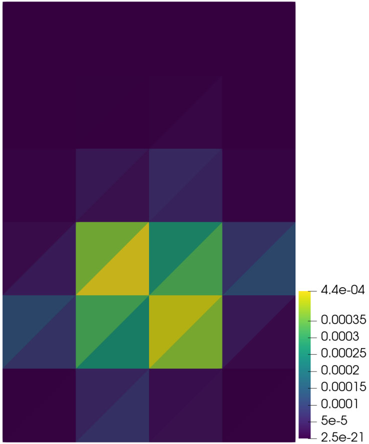
Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

Etape 0: Estimation. Erreur estimée $\simeq 0.06$



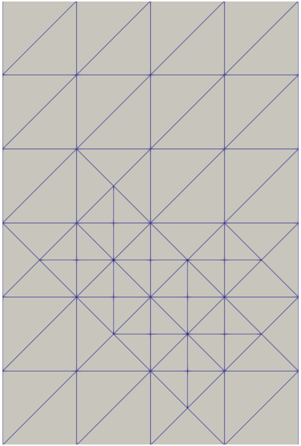
Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01
Etape 0: Marquage.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

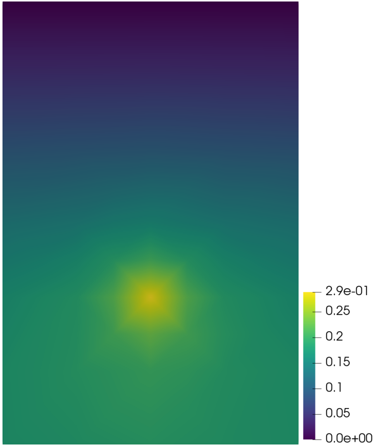
Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01
Etape 0: Raffinement.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

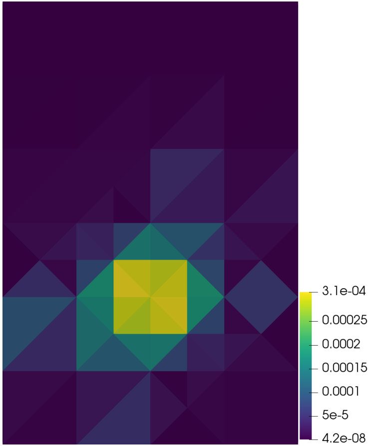
Etape 1: Résolution.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

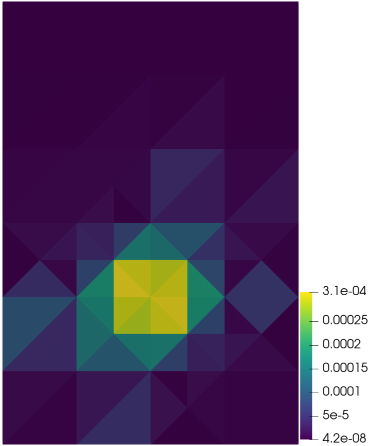
Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

Etape 1: Estimation. Erreur estimée $\simeq 0.07$



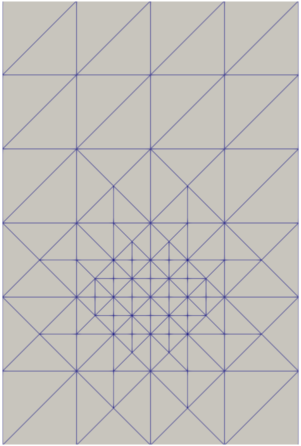
Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01
Etape 1: Marquage.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

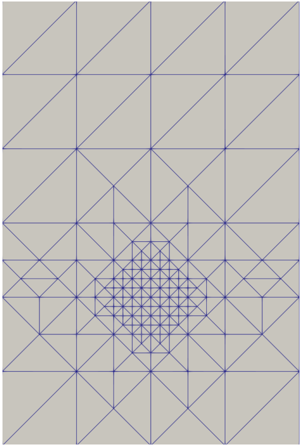
Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01
Etape 1: Raffinement.



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

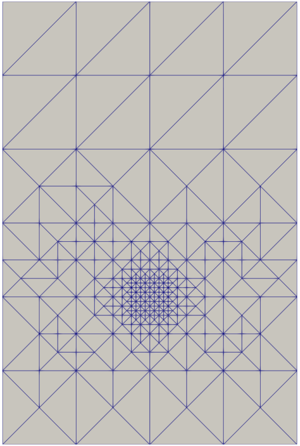
Etape 2: Erreur estimée $\simeq 0.04$



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

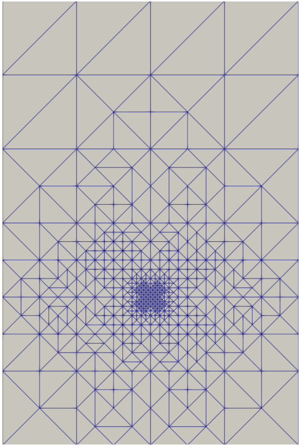
Etape 3: Erreur estimée $\simeq 0.03$



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

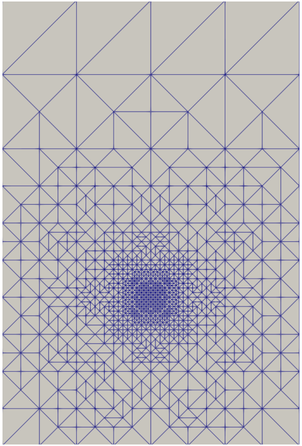
Etape 4: Erreur estimée $\simeq 0.02$



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

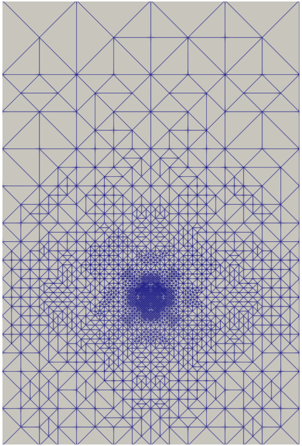
Etape 5: Erreur estimée $\simeq 0.017$



Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

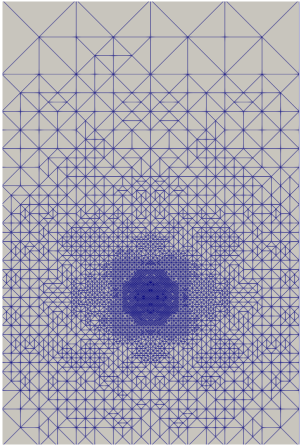
Etape 6: Erreur estimée $\simeq 0.012$



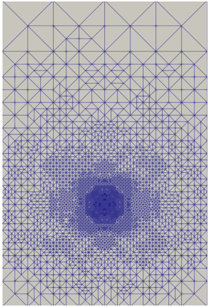
Estimation d'erreur et raffinement adaptatif

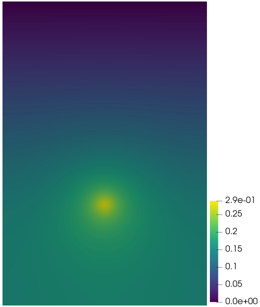
Algorithme d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif. Tolérance: 0.01

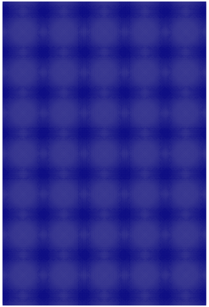
Etape 7: Erreur estimée $\simeq 0.008$ Tolérance atteinte!

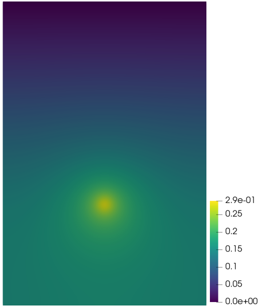


Estimation d'erreur et raffinement adaptatif









Erreur estimée $\simeq 0.008$
Taille système linéaire: 4129×4129

Erreur estimée $\simeq 0.005$
Taille système linéaire: 98945×98945

Ma thèse en (très) bref

Ma thèse en (très) bref

- Implémentation de méthodes d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif dans le logiciel éléments finis FEniCS.

Ma thèse en (très) bref

- Implémentation de méthodes d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif dans le logiciel éléments finis FEniCS.
- Etude mathématique des propriétés des estimateurs.

Ma thèse en (très) bref

- Implémentation de méthodes d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif dans le logiciel éléments finis FEniCS.
- Etude mathématique des propriétés des estimateurs.
- Intégration à des méthodes de résolution de problèmes non locaux impliquant un grand nombre de système linéaires.

Ma thèse en (très) bref

- Implémentation de méthodes d'estimation d'erreur et de raffinement adaptatif dans le logiciel éléments finis FEniCS.
- Etude mathématique des propriétés des estimateurs.
- Intégration à des méthodes de résolution de problèmes non locaux impliquant un grand nombre de système linéaires.
- Application à l'étude des propriétés biomécaniques du ménisque.

Merci de votre attention!